Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Kvadratické rovnice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_06
Pořadí DUMu v sadě	6
Vedoucí skupiny/sady	Helena Hufová
Datum vytvoření	5. 2. 2013
Jméno autora	Helena Hufová
e-mailový kontakt na autora	hufova@gymjev.cz
Ročník studia	1.
Předmět nebo tematická oblast	Matematika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál je určen pro studenty k nácviku a procvičení řešení kvadratických rovnic. Inovace: gradující obtížnost příkladů, využití ICT.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÉ ROVNICE

Základní pojmy:

kvadratická rovnice, kvadratický člen, lineární člen, absolutní člen, definiční obor rovnice, kořeny (řešení) rovnice, ekvivalentní úpravy rovnice, zkouška, typy kvadratických rovnic (obecná, bez absolutního členu, ryze kvadratická), normovaná kvadratická rovnice, doplnění na druhou mocninu lineárního dvojčlenu (doplnění na čtverec), vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, grafické řešení, slovní úlohy řešené rovnicemi

Ekvivalentní úpravy při řešení **rovnic:**

- přičtení stejného čísla nebo stejného výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo výrazem obsahujícím neznámou, který je definován,
- „ekvivalentní“ úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice.

Přehled vzorců a vztahů:

Kvadratická rovnice (obecná): $ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in R, a \neq 0$

diskriminant: $D = b^2 - 4ac$, pro $D > 0$ je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

pro $D < 0$ nemá rovnice v R řešení

pro $D = 0$ je $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Neúplná kvadratická rovnice:

bez absolutního členu: $ax^2 + bx = 0, \quad a, b \in R, a \neq 0$

ryze kvadratická: $ax^2 + c = 0, \quad a, c \in R, a \neq 0$

Normovaná kvadratická rovnice: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Rozklad na součin kořenových činitelů: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Viètovy vzorce (vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice):

$$x^2 + px + q = 0 \ \leftrightarrow \ (x_1 + x_2 = -p \ \wedge \ x_1 \cdot x_2 = q)$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \ \leftrightarrow \ \left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ \wedge \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

Příklad 1:

Ve kterém intervalu leží oba kořeny kvadratické rovnice $2x^2 - x = 6$?

a) $\langle 2, 6\rangle$
b) $\langle 0, 5\rangle$
c) $\langle -4, 3\rangle$
d) $\langle -6, -3\rangle$
e) $v\ \check{z}\acute{a}dn\acute{e}m$

Řešení: $2x^2 - x = 6$

$2x^2 - x - 6 = 0$

$D = \sqrt{1 + 48} = \sqrt{49} = 7$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \to 2 \in \langle -4, 3\rangle, \quad -\frac{3}{2} \in \langle -4, 3\rangle$

Správná odpověď je **c)**.

Příklad 2:

V rovnici $x^2 + bx - 12 = 0$ s neznámou x je jeden kořen $x_1 = -2$. Určete koeficient b a druhý kořen x_2.

Řešení: využijeme Viètových vzorců: $x^2 + bx - 12 = 0$

$(x + 2)(x - x_2) = 0$

$x_1 \cdot x_2 = -12 \quad \to \ -2 \cdot x_2 = -12 \ \to \ \boldsymbol{x_2 = 6}$

$x_1 + x_2 = -b \quad \to -2 + 6 = -b \quad \to \ \boldsymbol{b = -4}$

Příklad 3:

Řešte rovnici s neznámou ve jmenovateli: $\frac{a-2}{a} - \frac{4}{a^2-2a} - \frac{a}{2-a} = 0$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Řešení:

$$\frac{a-2}{a}-\frac{4}{a^2-2a}-\frac{a}{2-a}=0$$

$$\frac{a-2}{a}-\frac{4}{a(a-2)}+\frac{a}{a-2}=0 \qquad a\neq 0, a\neq 2$$

$$(a-2)(a-2)-4+a\cdot a=0$$

$$a^2-4a+4-4+a^2=0$$

$$2a^2-4a=0$$

$$2a(a-2)=0$$

$$a_1=0 \quad a_2=2$$

$$\textit{ani jeden kořen nesplňuje podmínku} \;\rightarrow\; \boldsymbol{K}=\emptyset$$

Úkoly:

1. Řešte neúplné kvadratické rovnice rozkladem podle vzorce nebo vytýkáním:
   a) $25x^2=9$
   b) $4x^2+1=0$
   c) $x^2-5=0$
   d) $(x+1)^2=4$
   e) $5x^2-x=0$
   f) $2x^2+3x=0$

2. Řešte kvadratické rovnice doplněním na čtverec:
   a) $y^2-6y+5=0$
   b) $y^2+8y-9=0$

3. Řešte kvadratické rovnice pomocí vzorce pro výpočet kořenů:
   a) $2a^2+1=3a$
   b) $9+9a^2=12a$
   c) $4a^2+12a+9=0$
   d) $3a^2-7a-6=0$

4. Určete, pro která x má daný výraz smysl:
   a) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-10x+24}$
   b) $\frac{4x-2}{6x^2-7x+2}$

5. Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla:
   a) 3 a $\frac{1}{5}$
   b) $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$

6. Řešte kvadratické rovnice pomocí Viètových vzorců:
   a) $x^2-5x-14=0$
   b) $x^2-20x+91=0$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

7. V dané rovnici s neznámou y je dán jeden kořen y_1. Určete koeficient b a druhý kořen y_2:
   a) $y^2 - by - 9 = 0,\ y_1 = -3$
   b) $y^2 - by + 12 = 0,\ y_1 = 4$

8. Řešte dané rovnice:
   a) $y(y-2) + (y-2)(y+2) = 0$
   b) $\frac{(y+3)^2}{5} - \frac{(2y-3)y}{2} = \frac{(3y-1)^2}{5} - 1$
   c) $\frac{y+3}{y-3} = 4 - \frac{y-1}{y-5}$

9. Řešte graficky kvadratické rovnice:
   a) $x^2 - x - 2 = 0$
   b) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

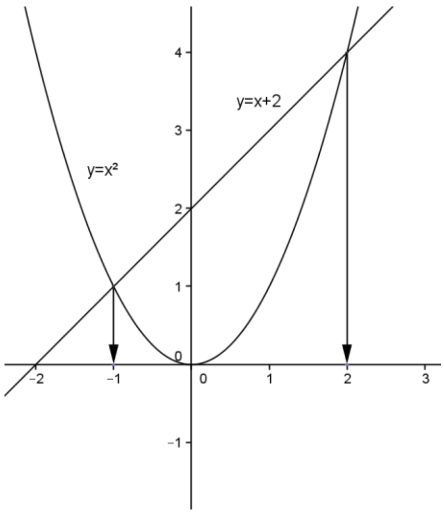
10. Rozdíl obou základen lichoběžníka je 6 cm, jeho výška je o 2 cm větší než kratší základna. Určete velikost obou základen a výšky, je-li obsah lichoběžníku 210 cm^2.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

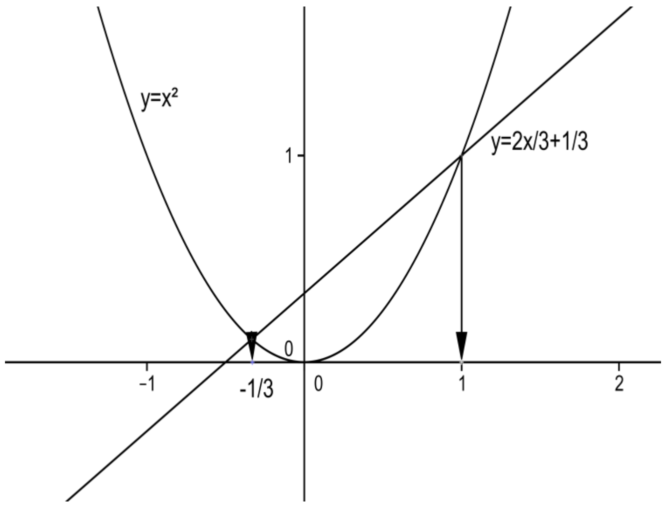
VÝSLEDKY:

1. a) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$, b) $\emptyset$, c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$, d) $-3,\ 1$, e) $0, \frac{1}{5}$, f) $-\frac{3}{2}$, 0 , **2.** a) $1, 5$, b) $-9, 1$, **3.** a) $\frac{1}{2}, 1$, b) $\emptyset$, c) $-\frac{3}{2}$, d)$-\frac{2}{3}$, 3 , **4.** a) $x \in R\backslash\{4, 6\}$, b) $x \in R\backslash\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$, **5.** a)$5x^2 - 16x + 3 = 0$, b) $6x^2 + x - 1 = 0$, **6.** a)$-2, 7$, b) $7, 13$, **7.** a) $y_2 = 3, b = 0$, b) $y_2 = 3, b = -7$, **8.** a) $-1, 2$, b) $-\frac{1}{2}$, 2 , c) $4, 9$, **9.** a) Obr.1, $-1, 2$, b) Obr. 2, $-\frac{1}{3}$, 1, **10.** $a = 18, c = 12, v = 14$

Obr. 1



Obr. 2



Zdroje:

Fuchs, E., Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0
Vejsada, F.,Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69
Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-067-86
Obrázky vytvořené pomocí programu Geogebra jsou dílem autora.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.