INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Kvadratické nerovnice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_07
Pořadí DUMu v sadě	7
Vedoucí skupiny/sady	Helena Hufová
Datum vytvoření	12. 2. 2013
Jméno autora	Helena Hufová
e-mailový kontakt na autora	hufova@gymjev.cz
Ročník studia	1.
Předmět nebo tematická oblast	Matematika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál je určen pro studenty k nácviku a procvičení řešení kvadratických nerovnic. Inovace: gradující obtížnost příkladů, využití ICT.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÉ NEROVNICE

Základní pojmy:

kvadratická nerovnice, kvadratický člen, lineární člen, absolutní člen, definiční obor nerovnice, množiny všech řešení nerovnice, ekvivalentní úpravy nerovnice, doplnění na druhou mocninu lineárního dvojčlenu (doplnění na čtverec), rozklad kvadratického trojčlenu na kořenové činitele, grafické řešení kvadratické nerovnice

Ekvivalentní úpravy při řešení **nerovnic:**

- přičtení stejného čísla nebo stejného výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným ***kladným číslem*** (znak nerovnosti se nemění),
- vynásobení obou stran rovnice stejným ***záporným číslem*** a současné ***obrácení znaku nerovnosti*** v nerovnici,
- „ekvivalentní“ úpravy výrazů na jednotlivých stranách nerovnice.

Přehled vzorců a vztahů:

Kvadratické nerovnice: $ax^2 + bx + c > 0, \quad a, b, c \in R, a \neq 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$

diskriminant: $D = b^2 - 4ac$

$a > 0$	$L = ax^2 + bx + c = 0$	$L > 0$	$L < 0$
$D > 0$	$\{x_1, x_2\}, kde\ x_1 < x_2$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$	(x_1, x_2)
$D = 0$	$\{x_1\}$	$R - \{x_1\}$	$\emptyset$
$D < 0$	$\emptyset$	R	$\emptyset$

Rozklad na součin kořenových činitelů: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde , x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Viètovy vzorce (vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice:

$$x^2 + px + q = 0 \;\leftrightarrow\; (x_1 + x_2 = -p \;\wedge\; x_1 \cdot x_2 = q)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\leftrightarrow\; \left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \;\wedge\; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

Příklad 1:

Řešte kvadratickou nerovnici: $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Řešení: nerovnici řešíme pomocí nulových bodů, které určíme použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ -\frac{6}{6} = -1 \end{cases}$$

Kvadratický trojčlen $3x^2 + 2x - 1$ rozložíme na součin:

$$3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$$

Nulové body -1 a $\frac{1}{3}$ rozdělí číselnou osu na tři intervaly a dosazením zjistíme, které z nich jsou řešením nerovnice:

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$	$+$	$-$	$+$

Množina všech řešení je $(-\infty,-1\rangle \cup \langle\frac{1}{3}, \infty)$.

Příklad 2:

Pro která a je výraz $a^2 - a - 20$ nezáporný?

a) $a \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 5,\infty)$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

b) $a \in \langle -4, 5\rangle$
c) $a \in (-\infty,-4) \cup (5,\infty)$
d) $a \in (-\infty,-5\rangle \cup \langle 4,\infty)$

Řešení: výraz má být nezáporný, tzn. $a^2 - a - 20 \geq 0$, trojčlen rozložíme na součin pomocí Viètových vzorců $(a-5)(a+4) \geq 0$, získáme nulové body -4 a 5, ktré nám rozdělí číselnou osu na tři intervaly a dosazením zjistíme řešení nerovnice:

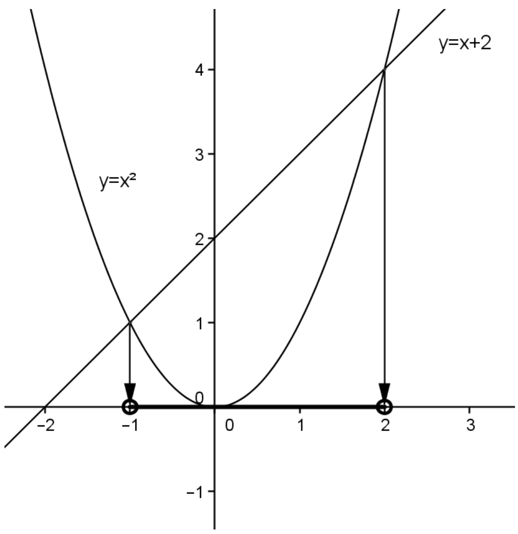
a	$(-\infty, -4)$	$(-4, 5)$	$(5, \infty)$
$a+4$	$-$	$+$	$+$
$a-5$	$-$	$-$	$+$
$(a+4)(a-5)$	$+$	$-$	$+$

Trojčlen $a^2 - a - 20$ je nezáporný pro$a \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 5,\infty)$, správná odpověď je **a)**.

Příklad 3:

Řešte graficky kvadratickou nerovnici: $x^2 - x - 2 < 0$

Řešení: nerovnici upravíme na tvar $x^2 < x + 2$. Potom sestrojíme parabolu $y = x^2$ a přímku $y = x + 2$.



Množina řešení je $(-1,2)$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<u>Úkoly:</u>

1. Rozložte kvadratický trojčlen pomocí Viètových vzorců:
   a) $x^2 + 17x + 60$
   b) $x^2 - 30x + 125$
   c) $x^2 + 6x - 91$
   d) $x^2 - 4x - 77$

2. Rozložte kvadratický trojčlen použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice:
   a) $3x^2 + 14x + 8$
   b) $5x^2 + 2x - 3$
   c) $2x^2 - 11x + 5$
   d) $2x^2 - x - 1$

3. Rozložte kvadratický trojčlen na součin doplněním na druhou mocninu lineárního dvojčlenu:
   a) $x^2 - 14x + 45$
   b) $2x^2 - 3x - 2$
   c) $3x^2 + 2x - 1$
   d) $x^2 + 6x + 10$

4. Řešte kvadratické nerovnice:
   a) $2x^2 > 18$
   b) $3x - 2x^2 \leq 0$

5. Řešte kvadratické nerovnice:
   a) $3a^2 + 10a < 8$
   b) $3a^2 + 10a \geq 8$
   c) $-2y^2 < 3y - 5$
   d) $-2y^2 \geq 3y - 5$

6. V kvadratické nerovnice:
   a) $x^2 - 2x + 2 < 0$
   b) $x^2 - 2x + 2 \leq 0$
   c) $x^2 - 2x + 2 > 0$
   d) $x^2 - 2x + 2 \geq 0$

7. Určete definiční obor výrazu pod odmocninou:
   a) $\sqrt{5x - 2x^2}$
   b) $\sqrt{x^2 - x - 72}$

8. Zjistěte, pro která x je daný výraz nekladný:
   a) $4x^2 - 9$
   b) $-2x^2 - 5x + 12$

9. Sestavte kvadratickou nerovnici, jejíž množinou řešení je:
   a) $(1, 3)$
   b) $(-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, \infty)$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

10. Řešte graficky kvadratické nerovnice:

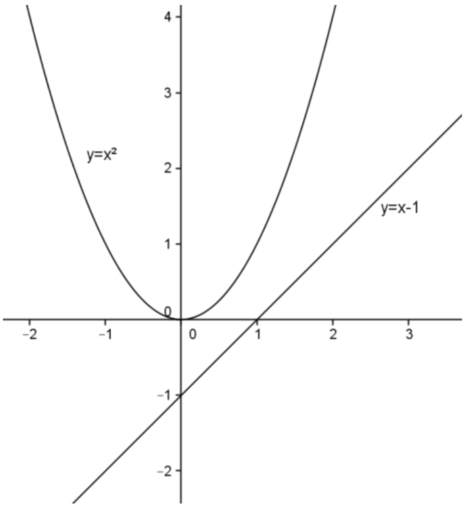
a) $x^2 - x + 1 < 0$

b) $2x^2 + 4x \geq 0$

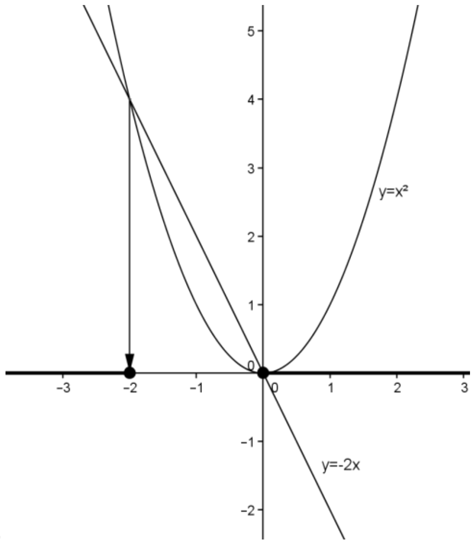
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

VÝSLEDKY:

1. a) $(x+5)(x+12)$, b) $(x-5)(x-25)$, c) $(x-7)(x+13)$, d) $(x+7)(x-11)$, **2.** a) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+4)$, b) $5\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+1)$, c) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)$, d) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$, **3.** a) $(x-5)(x-9)$, b) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$, c) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)$, d) $(x+3)^2+1 \ldots nelze\ již\ rozložit$ **4.** a) $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, b) $(-\infty,0\rangle\cup\langle\frac{3}{2},\infty)$, **5.** a) $\left(-4,\frac{2}{3}\right)$, b) $(-\infty,-4\rangle\cup\langle\frac{2}{3},\infty)$, c) $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,\infty)$, d) $\langle-\frac{5}{2},1\rangle$, **6.** a) $\emptyset$, b) $\emptyset$, c) R, d) R, **7.** a) $\langle 0,\frac{5}{2}\rangle$, b) $(-\infty,-8\rangle\cup\langle 9,\infty)$, **8.** a) $\langle-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$, b)$(-\infty,-4\rangle\cup\langle\frac{3}{2},\infty)$, **9.** a) např.$x^2-4x+3<0$, b) např. $x^2+4x-5\geq 0$, **10.** a) Obr.1, $\emptyset$, b) Obr. 2, $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 0,\infty)$.



Obr. 1



Obr. 2

Zdroje:
Fuchs, E., Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0
Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-067-86
Petáková, J.: MATEMATIKA příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7
Obrázky vytvořené pomocí programu Geogebra jsou dílem autora.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu. Dílo smí být dále šířeno pod licencí CC BY – SA (www.creativecommons.cz).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.