evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_08
Pořadí DUMu v sadě	8
Vedoucí skupiny/sady	Helena Hufová
Datum vytvoření	5. 3. 2013
Jméno autora	Helena Hufová
e-mailový kontakt na autora	hufova@gymjev.cz
Ročník studia	1.
Předmět nebo tematická oblast	Matematika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál je určen pro studenty k nácviku a procvičení řešení rovnic a nerovnic v součinovém a podílovém tvaru. Inovace: gradující obtížnost příkladů, využití ICT.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ROVNICE A NEROVNICE V SOUČINOVÉM A PODÍLOVÉM TVARU

Základní pojmy:

Rovnice v součinovém tvaru:

- součin několika činitelů je roven nule, právě když alespoň jeden z činitelů je roven nule.

Nerovnice v součinovém tvaru:

- „metoda nulových bodů“,
- součin několika nenulových činitelů je záporný, právě když lichý počet činitelů je záporný, jinak je součin kladný.

Rovnice v podílovém tvaru – nová ekvivalentní úprava:

- vynásobení obou stran rovnice stejným výrazem obsahujícím neznámou, který je definován a různý od nuly.

Nerovnice v podílovém tvaru – nové ekvivalentní úpravy:

- vynásobení obou stran nerovnice stejným výrazem obsahujícím neznámou, který je definován a kladný pro všechny hodnoty neznámé,
- vynásobení obou stran nerovnice stejným výrazem obsahujícím neznámou, který je definován a **záporný** pro všechny hodnoty neznámé a současné **obrácení znaku nerovnosti,**
- „metoda nulových bodů“
  - je-li aspoň jeden z činitelů ve jmenovateli zlomku nulový, zlomek nemá smysl,
  - jsou-li všichni činitelé ve jmenovateli zlomku nenuloví a aspoň jeden činitel v čitateli nulový, je zlomek roven nule,
  - jsou-li všichni činitelé v čitateli i jmenovateli zlomku nenuloví a lichý počet těchto činitelů je záporný, potom je zlomek záporný, jinak je kladný.

Přehled vzorců a vztahů:

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \;\leftrightarrow\; (x_1 + x_2 = -p \,\wedge\, x_1 \cdot x_2 = q)$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \;\leftrightarrow\; \left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \,\wedge\, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, které určíme pomocí vztahů $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který nemá žádný reálný kořen ($D < 0$) má stále stejné znaménko: pro $a > 0$ je $ax^2 + bx + c > 0$ (trojčlen je kladný), pro $a < 0$ je $ax^2 + bx + c < 0$ (trojčlen je záporný).

Příklad 1:

Řešte rovnici převedením na součinový tvar: $a^2 - 4a + 4 = 3a(a - 2)$.

Řešení:
$$a^2 - 4a + 4 = 3a(a - 2)$$
$$(a - 2)(a - 2) = 3a(a - 2)$$
$$(a - 2)(a - 2) - 3a(a - 2) = 0$$
$$(a - 2)(a - 2 - 3a) = 0$$
$$(a - 2)(-2a - 2) = 0$$
$$a - 2 = 0 \qquad -2a - 2 = 0$$
$$a = 2 \qquad -2a = 2$$
$$a = -1$$
$$\boldsymbol{K = \{-1, 2\}}$$

Příklad 2:

Řešte nerovnici v součinovém tvaru: $(x^2 - 8x - 48)(2x^2 + 3x + 4) \leq 0$.

Řešení:
$$(x^2 - 8x - 48)(2x^2 + 3x + 4) \leq 0$$
$$(x - 12)(x + 4)(2x^2 + 3x + 4) \leq 0$$

Trojčlen $2x^2 + 3x + 4$ má záporný diskriminant ($D = -23$) a pro $a > 0$ je vždy kladný. Pokračujeme „metodou nulových bodů". Nulovými body -4 a 12 rozdělíme číselnou osu na intervaly a diskutujeme znaménka výrazů:

x	$(-\infty, -4)$	$(-4, 12)$	$(12, \infty)$
$x - 12$	$-$	$-$	$+$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$
$2x^2 + 3x + 4$	$+$	$+$	$+$
$L(x)$	$+$	$-$	$+$

$L(x)$…..levá strana nerovnice

Levá strana nerovnice má být **nekladná**, množina kořenů tedy je $\boldsymbol{x \in \langle -4, 12 \rangle}$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 3:

Řešte nerovnici v podílovém tvaru:

$$\frac{6x^2 - 7x + 2}{(x-1)(x^2+3x+5)} \geq 0$$

Řešení: Výrazy v čitateli i ve jmenovateli zlomku rozložíme na součin. Trojčlen $6x^2 - 7x + 2$ má dva kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trojčlen $x^2 + 3x + 5$ má záporný diskriminant $(D = -11)$ a pro $a > 0$ je vždy kladný. Dostáváme tedy nerovnici:

$$\frac{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x^2+3x+5)} \geq 0$$

Pokračujeme „metodou nulových bodů“. Nulovými body $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$ rozdělíme číselnou osu na intervaly a diskutujeme znaménka výrazů:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$x - \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{2}{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 3x + 5$	$+$	$+$	$+$	$+$
$L(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Výrazy ve jmenovateli musí být různé od nuly, tzn. $x \neq 1$ a $x^2 + 3x + 5 \neq 0$.

Levá strana nerovnice má být **nezáporná**, množina kořenů tedy je $\boldsymbol{x} \in \left\langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \right\rangle \cup (\mathbf{1}, \infty)$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úkoly:

1. Řešte rovnice převedením na součinový tvar (pro rozklad použijte vytýkání a vzorce pro rozklad mnohočlenů:
   a) $(3x+5)(x^2-x)=0$
   b) $(x^2-5)(4x^2-4x+1)=0$
   c) $a(a-2)+(a-2)(a+2)=0$
   d) $(x-5)^2=2x-10$

2. Řešte rovnice převedením na součinový tvar (použijte rozklad kvadratického trojčlenu na kořenové činitele):
   a) $(x^2-10x)(x^2-9x-22)=0$
   b) $(x^2-13x+42)(x^2-9)=0$
   c) $(x^2+8x+15)(x^2+5)=0$
   d) $(2x^2-5x+2)(x^2+x+1)=0$

3. Řešte nerovnice převedením na součinový tvar:
   a) $(a-3)(2a+1)>0$
   b) $2a^2\leq 8$
   c) $3-a^2\geq 0$
   d) $a^2<a$

4. Řešte nerovnice převedením na součinový tvar:
   a) $(y^2-4y+4)(2-y)\leq 0$
   b) $(y^2-3y)(y+1)>0$

5. Řešte nerovnice převedením na součinový tvar:
   a) $(x-2)^2(x^2-x+2)<0$
   b) $(x^2+1)(x+3)^2\geq 0$

6. Řešte rovnice v podílovém tvaru:
   a) $\frac{(x-2)(x+3)}{2x+3}=0$
   b) $\frac{-4x+3}{x^2+2x+1}=0$
   c) $\frac{x^2-4x}{x^2-2}=1$
   d) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+3}{x-2}$

7. Řešte rovnice v podílovém tvaru:
   a) $\frac{a^2+2a-35}{49-a^2}=0$
   b) $\frac{3a^2-8a+4}{(3a-2)(2a^2+a+1)}=0$

8. Řešte nerovnice v podílovém tvaru:
   a) $\frac{3z-1}{z-2}>0$
   b) $\frac{3}{z-2}<1$
   c) $\frac{z-1}{z+3}\geq 2$
   d) $\frac{2}{z-1}\leq\frac{3}{z}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

9. Řešte nerovnice převedením na podílový tvar:

a) $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}>\frac{10}{3}$

b) $\frac{2a-1}{a-2}\leq\frac{a}{a-2}$

10. Řešte nerovnice v podílovém tvaru:

a) $\frac{y^3-8y^2+15y}{-y^2+2y-2}\leq 0$

b) $\frac{y^2+6y+9}{2y^2-y-1}>0$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VÝSLEDKY:

1. a) $\left\{-\frac{5}{3}, 0,1\right\}$, b) $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, \frac{1}{2}\right\}$, c) $\{-1,2\}$, d) $\{5,7\}$, **2.** a) $\{-2,0,10,11\}$, b) $\{-3,3,6,7\}$, c) $\{-3,-5\}$, d) $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, **3.** a) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, \infty)$, b) $\langle -2,2\rangle$, c) $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$, d) $(0,1)$, **4.** a) $\langle 2,\infty)$, b) $(-1,0) \cup (3, \infty)$, **5.** a) $\emptyset$, b) R, **6.** a) $\{-3,2\}, x \neq -\frac{3}{2}$, b) $\left\{\frac{3}{4}\right\}, x \neq -1$, c) $\left\{\frac{1}{2}\right\}, x \neq \pm\sqrt{2}$, d) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}, x \neq \pm 2$, **7.** a) $\{5\}, a \neq \pm 7$, b) $\{2\}, a \neq \frac{2}{3}$, **8.** a) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$, b) $(-\infty,2) \cup (5,\infty)$, c) $\langle -7,-3)$, d) $(0,1) \cup \langle 3,\infty)$ **9.** a) $(-2,-1) \cup (1,2)$, b) $\langle 1,2\rangle$, **10.** a) $\langle 0,3\rangle \cup \langle 5,\infty)$, b) $(-\infty,-3) \cup \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

Zdroje:

Fuchs, E., Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0

Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-067-86

Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy VÝRAZY, ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-076-4

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.