evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_09
Pořadí DUMu v sadě	9
Vedoucí skupiny/sady	Helena Hufová
Datum vytvoření	12. 3. 2013
Jméno autora	Helena Hufová
e-mailový kontakt na autora	hufova@gymjev.cz
Ročník studia	1.
Předmět nebo tematická oblast	Matematika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál je určen pro studenty k nácviku a procvičení řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami. Inovace: gradující obtížnost příkladů, využití ICT.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍMI HODNOTAMI

Základní pojmy:

Absolutní hodnota čísla a, geometrický význam absolutní hodnoty
rovnice a nerovnice s jednou absolutní hodnotou – způsoby řešení - použití definice, využití geometrické představy
rovnice a nerovnice s více absolutními hodnotami – „metoda nulových bodů“, rozklady kvadratického trojčlenu

Přehled vzorců a vztahů:

Absolutní hodnota čísla $a \in R$: $|a| = a$ pro $a \geq 0$
$|a| = -a$ pro $a < 0$

Pro $a, b \in R$ platí: $|a| \geq 0$
$|a| = |-a|$
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$

Geometrický význam absolutní hodnoty:
$|a|$…..vzdálenost obrazu čísla a na číselné ose od počátku
$|a - b| = |b - a|$…..vzdálenost obrazů čísela, b na číselné ose

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \leftrightarrow (x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q)$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \leftrightarrow \left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, které určíme pomocí vztahů $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$.
Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který nemá žádný reálný kořen ($D < 0$) má stále stejné znaménko: pro $a > 0$ je $ax^2 + bx + c > 0$ (trojčlen je kladný), pro $a < 0$ je $ax^2 + bx + c < 0$ (trojčlen je záporný).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1:

Řešte rovnici s absolutní hodnotou: $|2x-1|=3$

Řešení:

$$|2x-1|=3$$
$$\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|=3$$
$$|2|\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|=3$$
$$\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

Pomocí geometrické představy je vzdálenost obrazu čísla x od obrazu čísla $\frac{1}{2}$ na číselné ose rovna $\frac{3}{2}$. Taková čísla existují dvě, a to $x_1=-1$ a $x_2=2$.

$$K=\{-1,2\}$$

Příklad 2:

Řešte rovnici s absolutními hodnotami: $|x-2|-2x=2-|x+2|$

Řešení: Využijeme metodu „nulových bodů“, kterými rozdělíme množinu R na intervaly.
Nulové body uvnitř absolutních hodnot jsou -2 a 2. Získáme tři intervaly a zjistíme, jak se v těchto intervalech dvojčleny chovají. Pak vyřešíme v každém intervalu uvažovanou rovnici zvlášť. Jednotlivá řešení potom sjednotíme.

x	$(-\infty,-2)$	$\langle -2,2)$	$\langle 2,\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$rovnice$	$-x+2-2x=2+x+2$ $-3x+2=x+4$ $-4x=2$ $x=-\frac{1}{2}\notin I_1$	$-x+2-2x=2-x-2$ $-3x+2=-x$ $-2x=-2$ $x=1\in I_2$	$x-2-2x=2-x-2$ $-x-2=-x$ $0x=2$ $\emptyset$
$řešení$	$K_1=\emptyset$	$K_2=\{1\}$	$K_3=\emptyset$

$$\boldsymbol{K=K_1\cup K_2\cup K_3=\{1\}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

<u>Příklad 3:</u>

Řešte nerovnici s absolutními hodnotami: $|4-x| \geq |x|-2$

Řešení: po�tup je analogický �po�tupem v předcházejícím příkladu:

x	$(-\infty,0)$	$\langle 0,4)$	$\langle 4,\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	$-$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|4-x\|$	$4-x$	$4-x$	$-4+x$
nerovnice	$4-x \geq -x-2$ $0x \geq -6$ $0 \geq -6$ *nerovnost platí pro každé x z intervalu*	$4-x \geq x-2$ $-2x \geq -6$ $x \leq 3$ $x \in (-\infty,\mathbf{3}\rangle$	$-4+x \geq x-2$ $0x \geq 2$ $0 \geq 2$ *nerovnost neplatí pro žádné x z intervalu*
řešení	$K_1=(-\infty,0)$	$K_2=\langle 0,4)\cap(-\infty,\mathbf{3}\rangle=\langle 0,3\rangle$	$K_3=\emptyset$

$$\boldsymbol{K=K_1\cup K_2\cup K_3=(-\infty,0)\cup\langle 0,3\rangle=(-\infty,3\rangle}$$

<u>Příklad 4:</u>

Řešte nerovnici s absolutní hodnotou: $x^2+4x-8<|x+2|$

Řešení: postup je analogický s postupem v předcházejícím příkladu:

x	$(-\infty,-2)$	$\langle -2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$
nerovnice	$x^2+4x-8<-x-2$ $x^2+5x-6<0$ $(x-1)(x+6)<0$ $x\in(-6,1)$	$x^2+4x-8<x+2$ $x^2+3x-10<0$ $(x-2)(x+5)<0$ $x\in(-5,2)$
řešení	$K_1=(-\infty,-2)\cap(-6,1)=(-6,-2)$	$K_2=\langle -2,\infty)\cap(-5,2)=\langle -2,2)$

$$\boldsymbol{K=K_1\cup K_2=(-6,-2)\cup\langle -2,2)=(-6,2)}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úkoly:

1. Řešte rovnice s absolutní hodnotou:
   a) $|x-1|=5$
   b) $|x+2|=3$
   c) $\left|\frac{2}{3}-x\right|=1$
   d) $|2x-4|=3$
   e) $|3x+1|=4$
   f) $\left|1-\frac{1}{2}x\right|=2$

2. Řešte rovnice s absolutní hodnotou:
   a) $2-|z-3|=z-1$
   b) $|z+3|-2z=-7$

3. Řešte rovnice s absolutními hodnotami:
   a) $|2a+1|-|3-a|=a$
   b) $|1-a|+|a|=-1$

4. Řešte rovnice s absolutními hodnotami:
   a) $|y+1|-2|y|=y-3|y-1|$
   b) $|y+5|-|y|=|y-2|-y+7$

5. Řešte rovnice:
   a) $|a^2+3a|-4=0$
   b) $2a^2+5|a|=7$
   c) $|a^2+3a+2|=2a+4$
   d) $|a^2+4a|=3a+6$

6. Řešte nerovnice:
   a) $|x-2|\leq 3$
   b) $|1-x|>5$
   c) $2|x-1|\geq 5$
   d) $|x+3|<1$

7. Řešte nerovnice s absolutní hodnotou:
   a) $2a>|a+1|$
   b) $|a-1|+a\leq 2$

8. Řešte nerovnice s absolutními hodnotami:
   a) $|2y-3|\geq|3y-2|$
   b) $|2y+1|-|2y|+1<2y$
   c) $7-|y|>|y-5|$
   d) $|y|+|2-y|\leq 2$

9. Řešte nerovnice:
   a) $|7-y|-3|y|>|1-y|$
   b) $|y|-|y-5|\geq 4(y-3)$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

10. Řešte nerovnice:

a) $|a^2 - 2a - 3| \leq a + 1$

b) $|a^2 - 4| \geq a - 4$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

VÝSLEDKY:

1. a) $\{-4,6\}$, b) $\{-5,1\}$, c) $\left\{-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right\}$, d) $\left\{\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right\}$, e) $\left\{-\frac{5}{3},1\right\}$, f) $\{-2,6\}$, **2.** a) $(-\infty,3\rangle$, b) $\{10\}$, **3.** a) $\{-2,1\}$, b) $\emptyset$, **4.** a) $\left\{\frac{4}{5},2\right\}$, b) $\langle 2,\infty)$, **5.** a) $\{-4,1\}$, b) $\{-1,1\}$, c) $\{-2,1\}$, d) $\{-1,2\}$ **6.** a) $\langle -1,5\rangle$, b) $(-\infty,4)\cup(6,\infty)$, c) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{2},\infty\right)$, d) $(-4,-2)$, **7.** a) $(1,\infty)$, b) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right\rangle$, **8.** a) $\langle -1,1\rangle$, b) $(1,\infty)$, c) $(-1,6)$, d) $\langle 0,2\rangle$, **9.** a) $\left(-2,\frac{8}{5}\right)$, b) $\left(-\infty,\frac{7}{2}\right\rangle$, **10.** a) $\{-1\}\cup\langle 2,4\rangle$, b) R.

Zdroje:

Fuchs, E., Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0
Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-067-86
Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy VÝRAZY, ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-076-4
Vejsada, F.,Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.