INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_10
Pořadí DUMu v sadě	10
Vedoucí skupiny/sady	Helena Hufová
Datum vytvoření	19. 3. 2013
Jméno autora	Helena Hufová
e-mailový kontakt na autora	hufova@gymjev.cz
Ročník studia	1.
Předmět nebo tematická oblast	Matematika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál je určen pro studenty k nácviku a procvičení řešení rovnic a nerovnic s neznámou pod odmocninou. Inovace: gradující obtížnost příkladů, využití ICT.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ROVNICE A NEROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU

Základní pojmy:

Ekvivalentní úpravy při řešení **rovnic:**

- přičtení stejného čísla nebo stejného výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem,
- „ekvivalentní" úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice.

Ekvivalentní úpravy při řešení **nerovnic:**

- přičtení stejného čísla nebo stejného výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným ***kladným číslem*** (znak nerovnosti se nemění),
- vynásobení obou stran rovnice stejným ***záporným číslem*** a současné ***obrácení znaku nerovnosti*** v nerovnici,
- „ekvivalentní" úpravy výrazů na jednotlivých stranách nerovnice.

Důsledková úprava při řešení rovnic a nerovnic:

- umocnění obou stran **rovnice** na druhou – mohou přibýt řešení → nutná **zkouška,**
- umocnění obou stran **nerovnice** na druhou: pro a, b **nezáporná** platí: $a < b \leftrightarrow a^2 < b^2$
  pro a, b **nekladná** platí: $a < b \leftrightarrow a^2 > b^2$.

Přehled vzorců a vztahů:

<u>Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:</u>

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ \leftrightarrow \ (x_1 + x_2 = -p \ \wedge \ x_1 \cdot x_2 = q)$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ \leftrightarrow \ \left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ \wedge \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, které určíme pomocí vztahů $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$.

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který nemá žádný reálný kořen ($D < 0$) má stále stejné znaménko: pro $a > 0$ je $ax^2 + bx + c > 0$ (trojčlen je kladný), pro $a < 0$ je $ax^2 + bx + c < 0$ (trojčlen je záporný).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Příklad 1:

Řešte rovnici s neznámou pod odmocninou: $\sqrt{5-x} = -1 - x$

Řešení: $\sqrt{5-x} = -1 - x \quad /^2$

$$5 - x = 1 + 2x + x^2$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x-1)(x+4) = 0$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -4$$

Umocnění je důsledková úprava, proto je nutné provést zkoušku:

Zk.: $L_1 = \sqrt{5-1} = 2$

$P_1 = -1 - 1 = -2 \qquad L_1 \neq P_1$

$L_2 = \sqrt{5+4} = 3$

$P_2 = -1 + 4 = 3 \qquad L_2 = P_2$

Řešení je $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{-4}\}$.

Příklad 2:

Řešte rovnici s neznámou pod odmocninou: $\sqrt{x\sqrt{x} - x} = x - \sqrt{x}$

Řešení: $\sqrt{x\sqrt{x} - x} = x - \sqrt{x} \quad /^2$

$$x\sqrt{x} - x = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$$
$$3x\sqrt{x} = x^2 + 2x \quad /^2$$
$$9x^2x = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$
$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 5x + 4) = 0$$
$$x^2(x-1)(x-4) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 4$$

Po provedení zkoušky, která je nutnou součástí řešení, zjistíme, že rovnici vyhovují všechny tři kořeny. Řešení je $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{4}\}$.

Příklad 3:

Řešte nerovnici s neznámou pod odmocninou: $a - 1 < \sqrt{7-a}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Řešení: Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tzn. $7 - a \geq 0$, definiční obor nerovnice je tedy interval $(-\infty, 7\rangle$.
Výraz na levé straně nerovnice může být záporný či nezáporný, definiční obor se rozdělí na dvě množiny nulovým bodem $a = 1$ tohoto výrazu.
Pro $a \in (-\infty, 1)$ je výraz na levé straně záporný, pravá strana je v celém definičním oboru nezáporná, proto nerovnost platí pro $a \in (-\infty, 1) \cap (-\infty, 7\rangle = (-\infty, \mathbf{1})$.
Pro $a \in \langle 1, \infty)$ je výraz na levé straně nezáporný, pravá strana je v celém definičním oboru také nezáporná, proto umocnění nerovnice je v tomto případě ekvivalentní úprava:

$$a - 1 < \sqrt{7 - a} \quad /^2$$
$$a^2 - 2a + 1 < 7 - a$$
$$a^2 - a - 6 < 0$$
$$(a - 3)(a + 2) < 0$$

Řešením nerovnice $(a - 3)(a + 2) < 0$ je množina$(-2, 3) \cap \langle 1, \infty) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{3})$.
Konečné řešení nerovnice je $K = (-\infty, \mathbf{1}) \cup \langle \mathbf{1}, \mathbf{3}) = (-\infty, \mathbf{3})$.

<u>Úkoly:</u>

1. Řešte rovnice:
   a) $\sqrt{x - 2} = 5$
   b) $\sqrt{2x - 3} = 1$
   c) $\sqrt{x + 2} = -3$
   d) $-\sqrt{x + 2} = -2$

2. Řešte rovnice:
   a) $\sqrt{a - 2} = \sqrt{2a - 3}$
   b) $\sqrt{a^2 - 7} = \sqrt{a + 5}$
   c) $2\sqrt{3a + 6} = 3\sqrt{2a - 4}$
   d) $\sqrt{4a + 4} = \sqrt{5a - 4}$

3. Řešte rovnice:
   a) $4\sqrt{y^2 - 1} = 2y + 2$
   b) $3\sqrt{y + 5} + 5 = y$

4. Řešte rovnice:
   a) $\sqrt{a - 7} - \sqrt{5 - a} = 3$
   b) $\sqrt{10 - a} = 2 - \sqrt{a - 8}$

5. Řešte rovnice:
   a) $\sqrt{z + 2} - \sqrt{2z - 3} = \sqrt{4z - 7}$
   b) $\frac{5 - 3\sqrt{z}}{4\sqrt{z} - 7} = \frac{6\sqrt{z} - 11}{15 - 8\sqrt{z}}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

6. Řešte rovnice:
   a) $\sqrt{x^2-6x+9}=2$
   b) $\sqrt{4x^2-14x+1}=2x-5$

7. Řešte nerovnice:
   a) $\sqrt{x+1}<-3$
   b) $\sqrt{2-x}\geq 1$

8. Řešte nerovnice:
   a) $\sqrt{3-y}\geq 1-y$
   b) $2\sqrt{y-1}<y$

9. Řešte nerovnice :
   a) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\geq 2$
   b) $\sqrt{a}<a$

10. Řešte nerovnice:
   a) $\sqrt{y^2+4}<y+2$
   b) $\sqrt{y^2+4y-5}>y-3$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

VÝSLEDKY:

1. a) $\{27\}$, b) $\{2\}$, c) $\emptyset$, d) $\{2\}$, **2.** a) $\emptyset$, b) $\{-3,4\}$, c) $\{10\}$, d) $\{8\}$, **3.** a) $\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$, b) $\{20\}$, **4.** a) $\emptyset$, b) $\{9\}$, **5.** a) $\{2\}$, b) $\{4\}$, **6.** a) $\{1,5\}$, b) $\{4\}$, **7.** a) $\emptyset$, b) $(-\infty,1\rangle$, **8.** a) $\langle -1,3\rangle$, b) $\langle 1,2) \cup (2,\infty)$, **9.** a) $\langle 1,9\rangle$, b) $(0,1\rangle$, **10.** a) $(0,\infty)$, b) $(-\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty)$.

Zdroje:
Fuchs, E., Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0
Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-067-86
Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy VÝRAZY, ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-076-4
Vejsada, F.,Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69
Řídká, E., Blahunková, D., Zhouf, J.: Příprava na státní maturitu – matematika. Praha: Fragment, 2013. ISBN 978-80-253-1665-8

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.