evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Elementární funkce a jejich vlastnosti**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_11
Pořadí DUMu v sadě	11
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**11. dubna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál slouží k procvičení pojmu definiční obor funkce. Prostřednictvím ICT je možné využít ho k samostatnému studiu žáků. Inovace: Sada příkladů s gradující obtížností.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

11. Elementární funkce a jejich vlastnosti

Pojem funkce a funkční závislosti patří k základním pojmům v matematice, důležitým pojmům v různých jiných oborech. S tímto pojmem se setkáváme i v denní praxi (dráha je závislá na čase, cena za benzín je závislá na počtu ujetých kilometrů, délka kovové tyče je závislá na teplotě, rychlost fotosyntézy závisí na intenzitě světla a teplotě, výše zisku je závislá na počtu prodaných produktů …). S pojmem funkce v matematice je neoddělitelně spojen její definiční obor, tj. číselná množina, ze které je podle jistého předpisu každému číslu z této množiny přiřazováno právě jedno reálné číslo. A určení definičního oboru funkce, která je dána jistým předpisem (většinou rovnicí), je nejdůležitějším úkolem a výchozím bodem pro zkoumání dalších vlastností funkce.
Při určování definičního oboru funkce vycházíme především z těchto základních předpokladů:

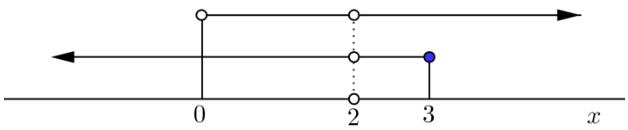
- jmenovatel zlomku se nesmí rovnat nule,
- sudá odmocnina je definována pouze pro nezáporná čísla,
- logaritmus je definován pouze pro čísla kladná,
- tangens není definován pro liché násobky čísla $\frac{\pi}{2}$,
- kotangens není definován pro celé násobky π.

Dále s výhodou využíváme známých vlastností elementárních funkcí a jejich grafů.
Uplatněním uvedených podmínek převedeme většinou určení definičního oboru funkce na řešení nerovnice.

Řešené příklady

1. Určete definiční obor funkce $f: y = ln\,x + \frac{x}{x-2} - \sqrt{3-x}$.

   Vzhledem k výše uvedeným předpokladům musí platit: $x > 0 \wedge x - 2 \neq 0 \wedge 3 - x \geq 0$. Řešením této soustavy nerovnic dostáváme: $x > 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \leq 3$. Po znázornění příslušných podmínek na číselné ose vidíme, že $D\ f\ =\ 0;2\ \cup\ 2;3\rangle$.



Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

2. Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{tg\frac{x}{2}}$.

   Výraz pod druhou odmocninou musí být nezáporný, tedy řešíme nerovnici $tg\frac{x}{2} \geq 0$.

   Ze znalosti grafu funkce tangens (případně z jednotkové kružnice) plyne, že

   $k\pi \leq \frac{x}{2} < \ 2k+1\ \frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo. Převedením této soustavy nerovnic na soustavu

   $2k\pi \leq x < \ 2k+1\ \pi$ dostáváme podmínku pro x z definičního oboru ve tvaru

   $x \in \left\langle 2k\pi;\ 2k+1\ \pi\ \right.,\ k \in Z$.

3. Určete definiční obor funkce $f : y = log\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-6}$.

   Protože logaritmus je definován pouze pro kladná čísla, musí platit: $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-6} > 0$. Pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu v čitateli a jmenovateli upravíme nerovnici na tvar $\frac{x-3\quad x-2}{x+6\quad x-1} > 0$, kterou řešíme pomocí nulových bodů čitatele a jmenovatele a znaménkových změn. Situaci znázorníme na číselné ose.

Z grafického znázornění určíme definiční obor, tedy množinu těch x, pro která výraz $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-6}$ nabývá kladných hodnot. V našem případě $D\ f\ = \ -\infty;-6\ \cup\ 1;2\ \cup\ 3;\infty\ $.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Příklady k procvičení

Ve všech případech určete definiční obor funkce, která je dána funkčním předpisem.

1. $f : y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
2. $f : y = \dfrac{\sqrt{x+7}}{x\ \ x-2}$
3. $f : y = \dfrac{2}{\sqrt{6-x-x^2}}$
4. $f : y = \sqrt{\dfrac{x}{2x-7}}$
5. $f : y = \dfrac{2x+11}{x^2+\sqrt{x}}$
6. $f : y = \sqrt{25x^3-9x}$
7. $f : y = \dfrac{x-8}{|x|+3}$
8. $f : y = \dfrac{log\ \ 1-x^2}{2x-1}$
9. $f : y = ln\dfrac{x-1\ {}^{2}}{3+x}$
10. $f : y = \dfrac{1}{\sqrt{1-tg\,x}}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: 1. $\langle 0;\infty$, **2.** $\langle -7;0 \cup 0;2 \cup 2;\infty$, **3.** $-3;2$, **4.** $-\infty;0\rangle \cup \left(\frac{7}{2};\infty\right.$, **5.** $0;\infty$,

6. $\left\langle -\frac{3}{5};0\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{5};\infty\right.$, **7.** $-\infty;\infty$, **8.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};1\right.$, **9.** $-3;1 \cup 1;\infty$,

10. $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in Z$

Zdroje:

ODVÁRKO, Oldřich. Funkce. Praha: Prometheus, 1994. ISBN 80-85849-09-7

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.