evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**K čemu je spojitost dobrá?**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_12
Pořadí DUMu v sadě	12
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**7. ledna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze použít pro procvičení pojmu spojitost funkce, prostřednictvím ICT také k samostatnému studiu žáků. Inovace: Snaha o pochopení pojmu spojitost funkce, nikoliv jen automatické „střídání znamének“.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

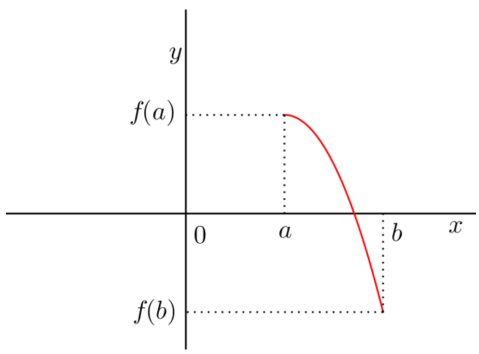
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

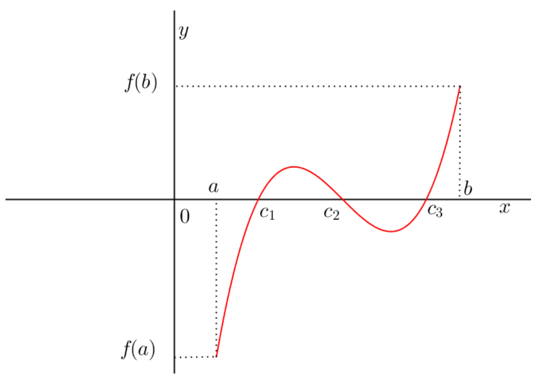
12. K čemu je spojitost dobrá?

Pokud již známe pojem limita funkce, můžeme říci, že funkce *f* se nazývá spojitá v bodě *a*, jestliže je definována v nějakém okolí tohoto bodu a jestliže $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Jednoduše – funkce je spojitá, jestliže její graf můžeme nakreslit jedním tahem.
Známé elementární funkce (mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické), jakož i jejich součet, součin i podíl jsou spojité pro každé *x*, pro které jsou definovány.
Bez znalosti pojmu limita můžeme definici funkce spojité v bodě zapsat symbolicky takto:
Funkce *f* je spojitá v bodě *a* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in R\colon\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pozn.: Jestliže nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pouze $\forall x \in \langle a; a+\delta)$ resp. $\forall x \in (a-\delta; a\rangle$, pak říkáme, že funkce *f* je spojitá v bodě *a* zprava resp. zleva.
Pozn.: srovnejte pozorně s definicemi pojmu limita funkce v bodě *a*, limita funkce v bodě *a* zprava resp. zleva.
Výše uvedené definice potřebujeme proto, abychom mohli definovat funkci spojitou v $\langle a;b\rangle$. Platí totiž, že funkce *f* je spojitá v $\langle a;b\rangle$, je-li spojitá v každém bodě $a;b$ a v bodě *a* je spojitá zprava a v bodě *b* je spojitá zleva. Pro funkce spojité v $\langle a;b\rangle$ platí dvě významné věty - věta Weierstrassova a věta Bolzano- Weierstrassova (věty, které se po někom jmenují, jsou vždy významné). Praktické využití pro výpočty má především důsledek druhé z vět – tzv. Darbouxova vlastnost funkcí spojitých v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$. Mají-li totiž navíc funkční hodnoty v bodech *a*, *b* různá znaménka, pak nutně musí existovat alespoň jeden bod $c \in a;b$ tak, že $f(c) = 0$, tedy graf takové funkce musí mezi body *a*, *b* protnout osu *x* alespoň v jednom bodě (viz obr.)

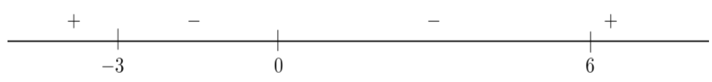




Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

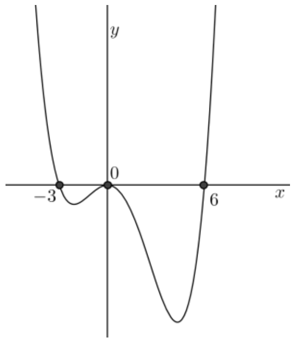
Řešené příklady

1. Najděte interval délky *0,5j*, ve kterém leží aspoň jeden kořen rovnice
   $x^3+2x-11=0$.
   Řešení: Funkce $f: y=x^3+2x-11$ je spojitá $\forall x\in R$ - jedná se o součet spojitých funkcí. Pro kořen *c* dané rovnice tedy musí platit $f(c)=0$. Určíme-li funkční hodnoty funkce f v několika bodech, např.: $f(0)=-11<0$
   $f(1)=-8<0$
   $f(2)=1>0$, vidíme, že v $(1;2)$ jsou splněny podmínky Darbouxovy vlastnosti, tedy v tomto intervalu určitě hledaný kořen leží. Protože však máme najít interval délky *0,5j*, určíme ještě $f\left(\frac{3}{2}\right)$. Zjistíme, že $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{85}{8}<0$, tedy hledaný interval, ve kterém leží kořen rovnice je $\left(\frac{3}{2};2\right)$.
2. Řešte v R nerovnici $x^4-3x^3-18x^2<0$.
   Funkce $f: y=x^4-3x^3-18x^2$ je spojitá $\forall x\in R$ - jedná se o součet spojitých funkcí. Řešením dané nerovnice jsou tedy taková $x\in R$, pro která je funkční hodnota funkce f záporným číslem, neboli graf této funkce leží pod osou x. Protíná-li graf funkce osu *x*, pak musí existovat řešení rovnice $x^4-3x^3-18x^2=0$ a tato řešení (tzv. nulové body) pak oddělují intervaly, ve kterých je graf funkce pod osou x resp. nad osou x. Platí:
   $x^4-3x^3-18x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3x-18)=0 \Leftrightarrow x^2(x-6)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6 \vee x=-3$
   Přitom $x=0$ je tzv. dvojnásobným nulovým bodem. Vyznačíme-li si tyto body na číselné ose, pak máme průsečíky grafu funkce s osou x. V našem případě jsou právě tři, přičemž v bodě $x=0$ se graf funkce osy x dotkne (osa *x* bude tečnou grafu funkce *f*). Je jasné, že graf spojité funkce musí „projít" těmito body a mezi nimi je buď pod osou *x* ($f(x)<0$) nebo nad osou *x* ($f(x)>0$). To zjistíme velmi snadno tak, že určíme funkční hodnotu příslušné funkce v libovolném vnitřním bodě vzniklých intervalů. Tak např.: $f(-4)=160>0$, $f(-1)=-14<0$, $f(1)=-20<0$, $f(7)=490>0$. Tedy



Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Protože se jedná o spojitou funkci, jejíž graf můžeme nakreslit jedním tahem a známe intervaly, ve kterých jsou funkční hodnoty kladné a ve kterých jsou záporné, můžeme si graf funkce *f* představit. Bude vypadat asi takto:



Pozn.: Není nutné zjišťovat funkční hodnoty ve všech bodech, stačí nám jediný. Jedná-li se totiž o nulové body s lichou násobností ($x, x^3, x^5, ...$), pak v levém a pravém okolí nulového bodu musí funkční hodnoty funkce nabývat různých znamének, v okolí bodů se sudou násobností (x^2 v našem případě, $x^4, x^6, \dots$), musí být znaménka funkčních hodnot stejná – jedná se o body dotyku.

Řešením naší nerovnice je tedy $-3;0 \cup 0;6$.

3. Řešte nerovnici $\dfrac{x-x^3}{x+3} \geq 0$.

Řešení: Funkce $f: y = \dfrac{x-x^3}{x+3}$ je spojitá $\forall x \neq -3, x \in R$ (protože funkce f není v bodě $x = -3$ definována, nemůže být v tomto bodě spojitá).

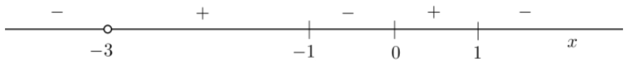
Řešením rovnice $\dfrac{x-x^3}{x+3} = 0$ zjistíme průsečíky grafu funkce s osou *x* (nulové body).

$$\frac{x-x^3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1.$$

V tomto případě se jedná o jednonásobné nulové body (tedy body s lichou násobností). Kromě těchto bodů si vyznačíme na číselné ose i bod $x = -3$. Je to bod, ve kterém funkce není definována - není špatné si ho vyznačit prázdným kroužkem.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Protože např.: $f(2) = -\frac{6}{5} < 0$, můžeme snadno a rychle (znaménka se střídají) určit znaménka funkčních hodnot ve zbývajících intervalech.
Řešením naší nerovnice je tedy $-3;-1\rangle \cup \langle 0;1\rangle$.

Příklady k procvičení

1. Dokažte, že v $1;2$ leží aspoň jeden kořen rovnice $x^3 - 12x + 14 = 0$. Rozhodněte, zda má daná rovnice další kořeny – pokud ano, určete intervaly, ve kterých leží.
2. Určete interval délky *0,25j*, ve kterém leží alespoň jeden kořen rovnice $x^2 - 2x + 2 = 0$.
3. Řešte v R nerovnice:
   a) $x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 < 0$
   b) $x(x-7)(x-\frac{1}{2})^2 > 0$
   c) $x-3\ \ x^2\ \ x-2\ ^2\ \ x+1\ ^3 \le 0$
   d) $x^2(x+1)^2(x+2)^3(x+3) > 0$
   e) $x^3 - 6x^2 + 8x \le 0$
   f) $x^3 + 2x^2 - 15x \ge 0$
   g) $x^4 + 3x^3 - 10x^2 < 0$
   h) $x^2 + 10x + 25\ \ \ x-9\ < 0$
   i) $-x^4 < 4x^5$
   j) $x^5 \ge 16x^3$
4. Řešte nerovnice:
   a) $\frac{x+5}{1-x^2} \le 0$
   b) $\frac{x^4 - x^2}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

c) $\frac{x^{4}-4x^{2}}{x^{2}-2x-3} \geq 0$

d) $\frac{x^{5}+x^{2}}{x^{5}-x^{2}} < 0$

e) $\frac{2x^{7}+16x^{4}}{x^{7}-x^{4}} \leq 0$

f) $\frac{x-3 \quad ^{2}}{x^{6}-x^{8}} \geq 0$

g) $\frac{x^{3}+8}{x^{2}-9} \leq 0$

h) $\frac{3x+4}{2-x} < 1$

i) $\frac{x^{2}+1}{x} > 2$

j) $x^{2} \leq \frac{1}{x}$

5. Řešte nerovnice:

a) $\sqrt{x+18} < 2-x$

b) $\sqrt{x+1} > x-1$

Výsledky: 1. Jedná se o funkci spojitou $\forall x \in R$, $f(1)=3, f(2)=-2$. Jsou splněny podmínky Darbouxovy vlastnosti a tím je důkaz proveden. Rovnice má další dva kořeny, leží v intervalech $2;3$, $-4;-3$, **2.** $\left(-2;-\frac{7}{4}\right)$, **3.** a) $-\infty;0 \cup 1;2 \cup 2;3$, b) $-\infty;0 \cup 7;\infty$, c) $\langle -1;3 \rangle$,

d) $-\infty;-3 \cup -2;-1 \cup -1;0 \cup 0;\infty$, e) $-\infty;0\rangle \cup \langle 2;4\rangle$,f) $\langle -5;0\rangle \cup \langle 3;\infty \rangle$,g) $-5;0 \cup 0;2$,

h) $-\infty;-5 \cup -5;9$,i) $\left(-\frac{1}{4};0\right) \cup 0;\infty$, j) $\langle -4;0\rangle \cup \langle 4;\infty$, **4.** a) $\langle -5;-1 \cup 1;\infty$,

b) $-1;0 \cup 0;1 \cup 2;3$, c) $-\infty;-2\rangle \cup -1;2\rangle \cup 3;\infty$, d) $-1;0 \cup 0;1$,e) $\langle -2;0 \cup 0;1$,

f) $-1;0 \cup 0;1$, g) $-\infty;-3 \cup \langle -2;3$, h) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup 2;\infty$, i) $0;1 \cup 1;\infty$, j) $0;1\rangle$,

5. a) $\langle -18;-2$, b) $\langle -1;3$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

MINORSKIJ, Vasilij Pavlovič. Sbírka úloh z vyšší matematiky. Praha: SNTL, 1964

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.