evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Limita – úžasný objev**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_13
Pořadí DUMu v sadě	13
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**10. ledna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Sada příkladů pro procvičení a pochopení pojmu limita funkce, prostřednictvím ICT lze využít také k samostatnému studiu žáků. Inovace: Geometrické souvislosti, čtení grafu**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

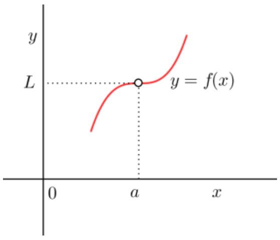
13. Limita je zázrak

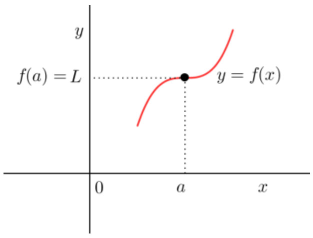
U definice limity se vyplatí rozumět matematické symbolice:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in R:\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. V případě $x \in (a-\delta; a)$ resp. $x \in (a; a+\delta)$ hovoříme o limitě zleva resp. zprava.

Určit (vypočítat) limitu funkce *f* v bodě *a* je snadné, víme-li, že funkce *f* je v bodě *a* spojitá – v tomto případě je totiž příslušná limita rovna funkční hodnotě této funkce v bodě *a*, tedy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Není-li funkce v bodě *a* spojitá, pak pro výpočet limity používáme nejčastěji větu o limitě dvou funkcí (danou funkci *f* nahrazujeme funkcí *g* , která je v bodě *a* spojitá) a větu o limitě součtu, součinu a podílu funkcí.

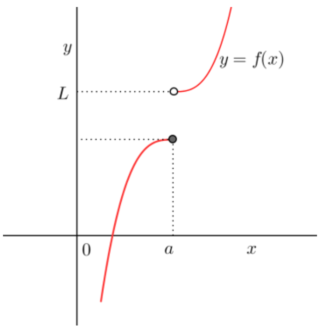
Jestliže $a \in R, L \in R$, hovoříme o vlastní limitě ve vlastním bodě. Pokud je však *a* nebo *L* buď $+\infty$ nebo $-\infty$ hovoříme o limitě v nevlastním bodě nebo o nevlastní limitě. Všechny případy limit ilustrují následující obrázky.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

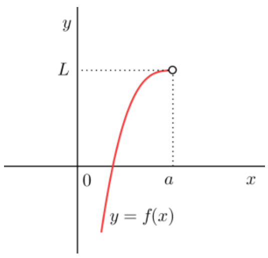




$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$



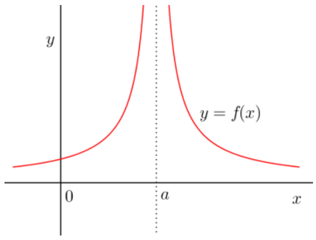
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



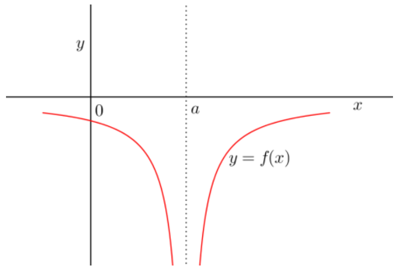
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

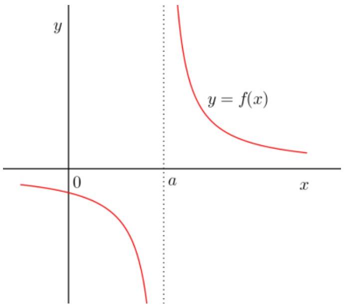
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

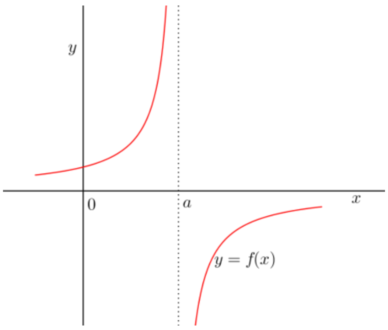


$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

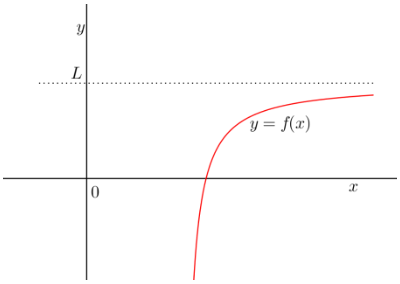
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



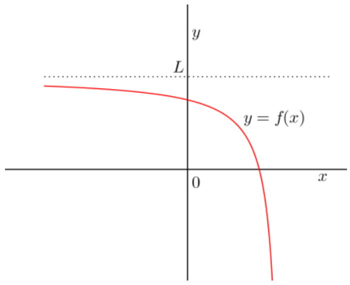
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

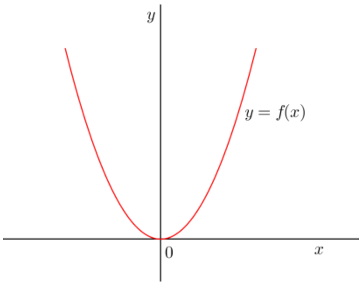


$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$



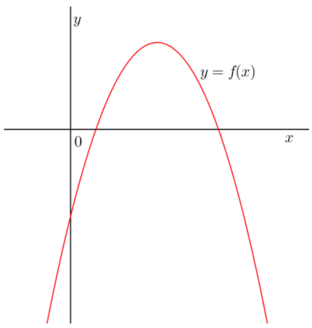
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



Také pro nevlastní limity lze použít větu o limitě součtu, součinu a podílu funkcí, pokud nevede k tzv. neurčitým výrazům typu $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}$. Symbolicky lze psát:

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$\infty + \infty = \infty \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$

$\infty \cdot \infty = \infty \qquad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \qquad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Je-li $k \in R, k > 0$, pak $k \cdot \infty = \infty,\ k \cdot (-\infty) = -\infty$, je-li $k \in R, k < 0$, pak $k \cdot \infty = -\infty,\ k \cdot (-\infty) = +\infty$.

K určení některých limit je třeba znát základní vzorce z algebry i goniometrie, umět rozkládat v součin, krátit a usměrňovat zlomky (odmocninu můžeme odstraňovat ze jmenovatele, ale také z čitatele). Někdy nám také pomůže znalost grafů elementárních funkcí a znalost základních limit, k nimž především patří $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Řešené příklady

Ve všech případech vypočtěte limitu dané funkce v daném bodě:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 7}{\cos 5x}$

   Protože funkce $f : y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 7}{\cos 5x}$ je v bodě $x = 0$ spojitá ($D(f) = \langle -4; \infty)$ a $\cos 5 \cdot 0 = \cos 0 = 1$), je limita funkce v bodě 0 rovna funkční hodnotě této funkce v bodě 0, tedy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 7}{\cos 5x} = f(0) = \dfrac{\sqrt{0+4} - 7}{\cos 5 \cdot 0} = \dfrac{2-7}{1} = -5$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

   Funkce $f : y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$ není v bodě $x = -1$ definována ($D(f) = R - \{-1\}$), není tedy v tomto bodě spojitá. Kromě bodu $x = -1$ je však funkce f rovna funkci $g : y = \dfrac{x-2}{x^2 - x + 1}$, protože $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \dfrac{(x-2) \cdot (x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$ a pro $x \neq -1$ můžeme výrazem $x + 1$ krátit. Podle věty o limitě dvou funkcí pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, v našem případě $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x^2 - x + 1}$. Protože funkce g je spojitá v bodě $x = -1$, je její limita v tomto bodě rovna funkční hodnotě, tedy $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{-1-2}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \dfrac{-3}{3} = -1 = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{4x \sin x}$

Funkce $f: y = \dfrac{1-\cos 2x}{4x\sin x}$ není v bodě $x = 0$ definována, není tedy v tomto bodě spojitá. Tentokrát nahradíme funkci *f* funkcí $g: y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$, jejíž limitu již dokážeme spočítat. Platí totiž:

$$\frac{1-\cos 2x}{4x\sin x} = \frac{1- \ \cos^2 x - \sin^2 x}{4x\sin x} = \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{4x\sin x} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{4x\sin x} = \frac{2\sin^2 x}{4x\sin x} = \frac{\sin x}{2x} =$$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$. Podle věty o limitě dvou funkcí je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{4x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$. Funkce *g* není sice také definována v bodě 0, tedy není v tomto bodě spojitá, ale podle věty o limitě součinu platí: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Protože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (funkce konstantní je spojitá $\forall x \in R$) a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (základní limita), je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{4x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$.

4. Je dána funkce $f: y = \dfrac{3x}{4+x}$. Vypočtěte její limity pro $x \to -4^+, x \to -4^-, x \to -4$, $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to 0$ a načrtněte graf funkce *f* s vypočtenými limitami.

Výpočet jednostranných limit a limit v nevlastních bodech vyžaduje porozumění „počítání s nekonečnem“.

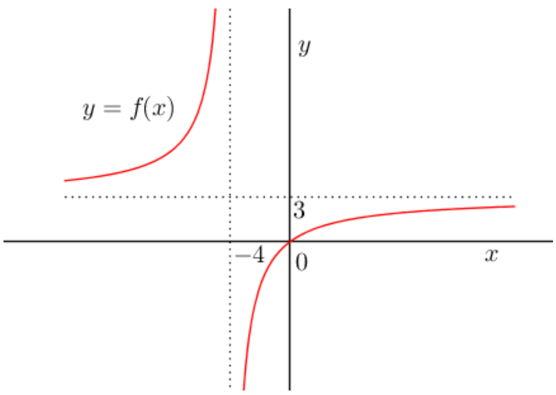
$\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{3x}{4+x}$ určíme tak, že dosazujeme za *x* reálná čísla z pravého okolí bodu -4, blízko bodu -4. Vidíme, že v čitateli zlomku bude číslo záporné, ve jmenovateli pak malé kladné číslo (tím menší, čím více se budeme k číslu -4 přibližovat). Podíl záporného čísla a „velmi malého“ kladného čísla je „velmi velké“ číslo záporné, tedy $-\infty$. Obdobně $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{3x}{4+x} = +\infty$, protože po dosazování čísel z levého okolí bodu -4 bude v čitateli opět číslo záporné, ale ve jmenovateli také číslo záporné (velmi malé). Protože $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{3x}{4+x} \neq \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{3x}{4+x}$ (limita zprava je různá od limity zleva), limita dané funkce v bodě -4 neexistuje.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{4+x}$ vede po dosazení za x k neurčitému výrazu $\dfrac{\infty}{\infty}$ (počítáme podle pravidel $3\cdot\infty=\infty, 4+\infty=\infty$). Funkci *f* ale můžeme v definičním oboru upravit takto:

$\dfrac{3x}{4+x}=\dfrac{\frac{3x}{x}}{\frac{4}{x}+\frac{x}{x}}=\dfrac{3}{\frac{4}{x}+1}$ a potom počítat limitu funkce *f*: $y=\dfrac{3}{\frac{4}{x}+1}$. Pomocí věty o limitě podílu a limitě součtu platí: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\frac{4}{x}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}+1\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}1}=\dfrac{3}{0+1}=3$. Opět si musíme umět říci, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$, protože dělíme-li jakékoliv číslo „velmi velkým“ číslem, dostáváme číslo „velmi malé“. Obdobně vypočteme a stejně odůvodníme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{4+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\frac{4}{x}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}3}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}1}=\dfrac{3}{0+1}=3$.

Konečně $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{4+x}=0$, protože se v tomto případě jedná o funkci spojitou v bodě 0, tedy limita funkce v bodě 0 je rovna funkční hodnotě funkce v tomto bodě.
Graf funkce f s vypočtenými limitami musí vypadat takto:



Příklady k procvičení

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4+x^{3}-64}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^3-5x^2-6x}{x^3-7x^2+6x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+3x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-5}{\cos 5x}$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\cos 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+\sin x}{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\sin 2x}{x+1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$

15. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+5}{x-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-7}{{x-2}^{\;3}}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

17. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5-x^2}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5x}{1-x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2+6}{9-x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-5x}{3x}$

21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2-x}$

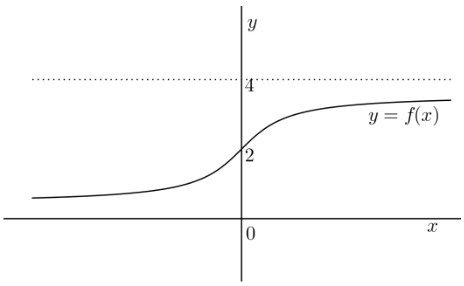
22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}x^7 - 3x^8\right)$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

24. Je dána funkce $f: y = \dfrac{1}{9-x^2}$. Určete její definiční obor, jednostranné limity v bodech, ve kterých funkce není definována, limity v nevlastních bodech a načrtněte graf funkce s vypočtenými limitami.

25. Podle obrázků určete požadované limity:

a) $D\ f\ = R$

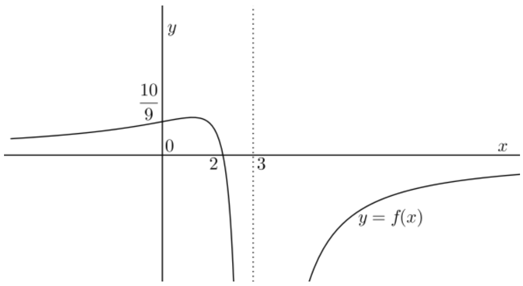


$\lim\limits_{x\to +\infty} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to 0} f\ \ x$

b) $D\ f\ = R - \ 3$



$\lim\limits_{x\to 0} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\ \ x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\ \ x$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: **1.** 48, **2.** $\frac{7}{5}$, **3.** $\frac{10}{3}$, **4.** -2, **5.** $\frac{1}{32}$, **6.** 2, **7.** $-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$, **8.** 2, **9.** 1, **10.** $4\sqrt{5}$, **11.** 6, **12.** $\frac{1}{16}$, **13.** $-\frac{8}{3}$, **14.** $-\frac{5}{2}$, **15.** $-\infty$, **16.** $-\infty$, **17.** $+\infty$, **18.** $-\infty$, **19.** $+\infty$, **20.** $-\frac{5}{3}$, **21.** $-\infty$, **22.** $-\infty$, **23.** $-\infty$,

24. $D(f)=R-\{-3;3\}$, $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{1}{9-x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{1}{9-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{9-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{9-x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{9-x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{9-x^2}=0$, **25. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$,

b) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{10}{9}$, $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

MINORSKIJ, Vasilij Pavlovič. Sbírka úloh z vyšší matematiky. Praha: SNTL, 1964

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.