evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Užití limity funkce**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_14
Pořadí DUMu v sadě	14
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**2. dubna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze využít k pochopení pojmu limita funkce, užitím programu Geogebra může sloužit ke zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT. Inovace: Geometrické souvislosti, čtení grafu.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

14. Užití limity funkce

Pojem limita funkce jako základní pojem diferenciálního a integrálního počtu má mnohostranné využití – mimo jiné také umožňuje určit a přesně sestrojit tečnu grafu funkce a asymptoty grafu funkce.

Platí: Je-li křivka grafem funkce $y = f(x)$ a existuje-li vlastní limita

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, pak tečna křivky v bodě $T(x_0, y_0)$ má rovnici

$y - y_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$. Uvedená limita není nic jiného, než směrnice této tečny – tedy tangenta úhlu, který tečna svírá s kladným směrem osy x. Známe-li tedy souřadnice bodu, ve kterém se má přímka dotýkat grafu dané funkce f a umíme-li spočítat příslušnou limitu, pak umíme také napsat rovnici této přímky a přímku v Oxy sestrojit (aniž bychom měli sestrojený graf funkce).

Asymptoty grafu funkce jsou přímky, které (pokud existují) jsou pro sestrojení grafu velmi důležité a usnadňují nám jeho sestrojení. Rozeznáváme dva typy asymptot – asymptoty se směrnicí a asymptoty bez směrnice. Z názvu je patrné, že asymptoty se směrnicí jsou takové přímky, které nejsou kolmé k ose x, kdežto asymptoty bez směrnice jsou k ose x kolmé ($tg\,\dfrac{\pi}{2}$ není definován).

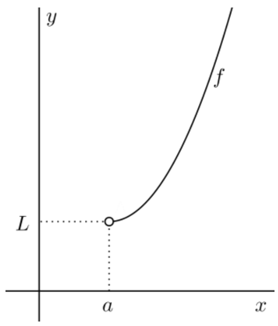
Přímku $y = ax + b$ nazveme asymptotou se směrnicí grafu funkce f, jestliže existují vlastní limity

$a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right]$.

Pozn.: Je-li $a = 0, b \in R$, pak je asymptota se směrnicí přímka rovnoběžná s osou x.

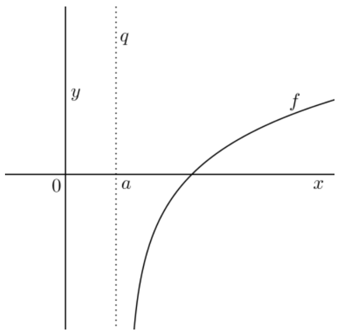
Přímku $x = a$ (rovnoběžka s osou y procházející bodem a na ose x) nazveme asymptotou bez směrnice, právě když funkce f není definována v bodě a, ale má v tomto bodě alespoň jednu jednostrannou limitu, která je nevlastní.

Př.:



Funkce f sice není definována v bodě a, má v tomto bodě limitu zprava, ale tato limita je vlastní ($L \in R$). Proto nemá v bodě a asymptotu bez směrnice.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Funkce f není definována v bodě a, $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ a tato limita je nevlastní. Proto přímka $q: x = a$ je asymptotou bez směrnice.

Řešené příklady

1. Napište rovnici tečny t grafu funkce $f: y = x^3 + 2x$ v bodě $T(-2; y_0)$.

Řešení: Nejprve určíme druhou souřadnici bodu T jako $f(-2)$.

Tedy $f(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2) = -12$.

Hledáme-li nyní rovnici tečny grafu funkce f v bodě $T(-2; -12)$, musíme určit směrnici k této tečny jako $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. V našem případě

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 + 2(x_0 + \Delta x) - (x_0^3 + 2x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x_0 + 2\Delta x - x_0^3 - 2x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2 + 2)}{\Delta x} = 3x_0^2 + 2$$. Po dosazení za x_0 dostáváme $k = 3 \cdot (-2)^2 + 2 = 14$ a tečna t má tedy rovnici $y - (-12) = 14[x - (-2)]$. Po úpravě $t: y = 14x + 16$

2. Napište rovnice asymptot grafu funkce $f: y = \dfrac{2x^3}{x^2 - x - 2}$.

Začneme určením definičního oboru dané funkce. Vidíme, že $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \vee x \neq -1$. Existují-li asymptoty bez směrnice grafu funkce f, pak musí existovat alespoň jedna jednostranná nevlastní limita v těchto bodech. Počítáme tedy např.

$\lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{2x^3}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{2x^3}{(x-2)(x+1)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^3}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{2x^3}{(x-2)(x+1)} = -\infty$. Nevlastní

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

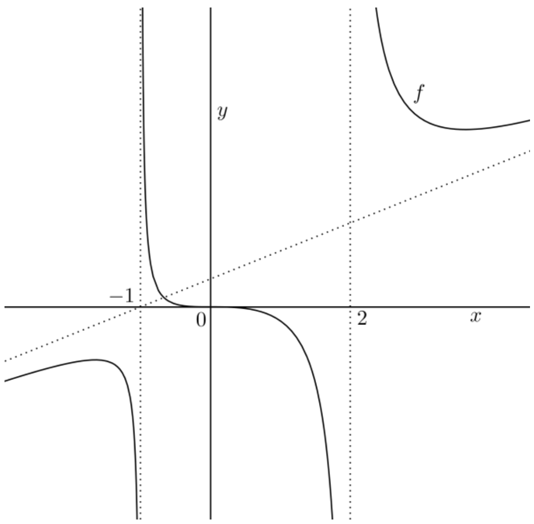
limity v těchto bodech existují, tedy přímky $x = 2,\ x = -1$ jsou asymptotami bez směrnice grafu funkce f.

Pozn.: Pro sestrojení grafu funkce by bylo vhodné spočítat i jednostranné limity zleva.

Pro zjištění existence asymptoty se směrnicí musíme vypočítat limitu

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{2x^3}{x^2-x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3}{x^3-x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 2$. Protože tato limita je vlastní (reálné číslo), budeme počítat také $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x^2-x-2}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3-2x^3+2x^2+4x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 2$.

Tato limita je rovněž reálným číslem, asymptota se směrnicí tedy existuje a má rovnici $y = 2x + 2$. Sestrojením grafu dané funkce se naše výpočty potvrdí.



Příklady k procvičení

Napište rovnici tečny grafu funkce f v bodě T.

1. $f: y=-x^2+2x$ v bodě $T[0;?]$.
2. $f: y=\dfrac{1}{x+2}$ v bodě $T[?;1]$.
3. $f: y=x+\dfrac{1}{x}$ v bodě $T[1;?]$.
4. Ve kterých bodech grafu funkce $f: y=(x^2-1)^2$ jsou tečny grafu rovnoběžné s osou x?
5. Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y=x^2-4x+9$ tak, aby tečna t byla rovnoběžná s přímkou $p: y=2x+5$.

Určete rovnice asymptot grafu funkce f bez směrnice i se směrnicí (pokud existují):

6. $f: y=\dfrac{2x}{x+3}$
7. $f: y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$
8. $f: y=x+\dfrac{2x}{x^2-1}$
9. $f: y=\dfrac{2x^2}{x+1}$
10. $f: y=\dfrac{x^3}{x^2-x-20}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky:

1. $T[0;0]$, $y=2x$, **2.** $T[-1;1]$, $y=-x$, **3.** $T[1;2]$, $y=2$, **4.** $T_1[-1,0]$, $T_2[1,0]$, $T_3[0,1]$, **5.** $T[3;6]$, $t: y=2x$, **6.** bez směrnice: $x=-3$, se směrnicí: $y=2$, **7.** asymptoty bez směrnice neexistují, se směrnicí: $y=\frac{1}{2}$, **8.** bez směrnice: $x=1$, $x=-1$, se směrnicí: $y=x$, **9.** bez směrnice: $x=-1$, se směrnicí: $y=2x-4$, **10.** bez směrnice: $x=5, x=-4$, se směrnicí: $y=x+1$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.