evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Naučme se derivovat**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_15
Pořadí DUMu v sadě	15
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**3. ledna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze použít k nácviku derivace funkce, prostřednictvím ICT také k samostatnému studiu žáků.** **Inovace: materiál obsahuje sadu příkladů s gradující obtížností.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

15. Naučme se derivovat

Derivací funkce nazýváme limitu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} == \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivaci funkce f v bodě x_0 značíme $f'(x_0)$ resp. $y'(x_0)$, derivaci funkce f v libovolném bodě $x \in D(f)$ pak $f'(x)$ resp. y'.

Abychom se naučili perfektně derivovat, musíme znát tabulku základních derivací, pravidla pro derivování a větu o derivaci funkce složené.

Platí: $(c)' = 0, c \in R$

$(x^n)' = nx^{n-1} \forall n \in R, x \in R^+$

$(x^n)' = nx^{n-1} \forall n \in R, x \in R^+$

$(c)' = 0, c \in R$

$(\sin x)' = \cos x \forall x \in R$

$(\cos x)' = -\sin x \forall x \in R$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \forall x \neq k\pi, k \in Z$

$(e^x)' = e^x \forall x \in R$

$(a^x)' = a^x \ln a \forall x \in R, a \in R^+ - 1$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \forall x \in R^+$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \forall x \in R^+, a \in R^+ - 1$

Jsou-li u, v dvě funkce, pak pravidla pro derivování lze symbolicky zapsat takto:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Je-li k libovolné nenulové reálné číslo, pak používáme pravidla

$$(kf(x))' = kf'(x), \left(\frac{f(x)}{k}\right)' = \frac{1}{k} f'(x).$$

Pro derivaci složené funkce (při splnění jistých podmínek) pak platí:

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$, kde $g(x)$ je funkce vnitřní a $f(x)$ funkce vnější.

Řešené příklady

Určete derivaci funkce f v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $f: y = 2x^2 + \dfrac{3}{x^6} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

   Využijeme pravidla pro derivaci součtu a rozdílu, nejprve však upravíme funkční předpis na tvar

   $y = 2x^2 + 3x^{-6} - 4x^{-\frac{1}{2}}$. Pak $y' = 4x + 3(-6)x^{-7} - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$ a po úpravě $y' = 4x - \dfrac{18}{x^7} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$

2. $f: y = (x^2 - 1)(9 - x)$

   Můžeme použít pravidlo pro derivaci součinu, vhodnější však je výraz na pravé straně upravit roznásobením.

   V prvním případě tedy $y' = (x^2-1)'(9-x) + (x^2-1)(9-x)' = 2x(9-x) + (x^2-1)(-1)$ a po úpravě dostáváme $y' = 18x - 2x^2 - x^2 + 1 = 18x - 3x^2 + 1$.

   Ve druhém případě po roznásobení je $y = 9x^2 - 9 - x^3 + x$, $y' = 18x - 3x^2 + 1$.

3. $f: y = \dfrac{\ln x}{1 - 2x}$

   V tomto případě použijeme pravidlo pro derivaci podílu, tedy

   $y' = \dfrac{(\ln x)'(1-2x) - \ln x(1-2x)'}{(1-2x)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}(1-2x) - \ln x(-2)}{(1-2x)^2}$. Po úpravě pak dostáváme derivovanou funkci ve tvaru $y' = \dfrac{1 - 2x + 2x\ln x}{x(1-2x)^2}$.

4. $f: y = \sin\dfrac{3x+1}{4}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Jedná se o složenou funkci, kde vnitřní funkcí je funkce $g: y = \frac{3x+1}{4}$, vnější funkcí je funkce $f: y = \sin g(x)$. Podle věty o derivaci složené funkce pak je

$$y' = \left(\cos\frac{3x+1}{4}\right)\left(\frac{3x+1}{4}\right)' = \left(\cos\frac{3x+1}{4}\right)\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cos\frac{3x+1}{4}.$$

Pozn.: Vnitřní funkci g derivujeme jednoduše takto: $y = \frac{1}{4}(3x+1)$, tedy

$y' = \frac{1}{4}(3x+1)' = \frac{1}{4}\cdot 3$ (stačí si uvědomit, že $\frac{1}{4}$ je reálná konstanta).

5. $f: y = \frac{1}{(3x-7)^2}$

I v tomto případě můžeme derivovat dvěma způsoby – buď jako podíl, přičemž funkci ve jmenovateli můžeme považovat za funkci složenou, nebo funkční předpis zapsat jako dvojčlen se záporným exponentem a derivovat přímo jako složenou funkci.

V prvním případě je $y' = \frac{0-2(3x-7)\cdot 3}{(3x-7)^4} = \frac{-6(3x-7)}{(3x-7)^4} = -\frac{6}{(3x-7)^3}$.

Ve druhém případě je $y = (3x-7)^{-2}$ a tedy $y' = -2(3x-7)^{-3}\cdot 3 = -\frac{6}{(3x-7)^3}$. Je vidět, že pokud si osvojíme větu o derivaci složené funkce, je druhý způsob rychlejší a můžeme ho s výhodou používat i v jiných případech derivace podílu a místo podílu tak derivovat součin.

Příklady k procvičení

Ve všech případech určete derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $y = 15\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}x$
2. $y = \frac{5x^2 - 3x + 2}{x^2}$
3. $y = 3 - \frac{2}{\sqrt[6]{x^5}}$
4. $y = 5\cdot 7^x$
5. $y = \frac{\log_2 x}{10}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

6. $y=(x^2-1)\cdot(x^2-4)\cdot x^2$
7. $y=x^3\cdot\cos x$
8. $y=\dfrac{x^4\cdot\ln x}{2}$
9. $y=2e^x\cdot tgx$
10. $y=(x-3)(1+\sin x)$
11. $y=\sqrt{x}(\ln x-2x)$
12. $y=\dfrac{3-2x}{3x+2}$
13. $y=\dfrac{x^2}{2-6x}$
14. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$
15. $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$
16. $y=\dfrac{xe^x-1}{x}$
17. $y=(2x-3x^3)^9$
18. $y=\sqrt{6x+\cos x}$
19. $y=3\sin\dfrac{x}{3}$
20. $y=10^{x^4-2x+5}$
21. $y=\log_3\ 8-x^3$
22. $y=\cot g(2x-\pi)$
23. $y=\sin^2 2x$
24. $y=\dfrac{\cos x^2}{\sin x}$
25. $y=e^{-x^2}\cdot\ln x$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: **1.** $y'=\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{2}$, **2.** $y'=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}$, **3.** $y'=\frac{5}{3x\sqrt[6]{x^5}}$, **4.** $y'=5\cdot 7^x\ln x$, **5.** $y'=\frac{1}{10x\ln 2}$,

6. $y'=6x^5-20x^3+8x$, **7.** $y'=3x^2\cos x-x^3\sin x$, **8.** $y'=2x^3\ln x+\frac{x^3}{2}$, **9.** $y'=2\left(e^x tgx+\frac{e^x}{\cos^2 x}\right)$,

10. $y'=1+\sin x+x\cos x-3\cos x$, **11.** $y'=\frac{\sqrt{x}\ln x}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{x}-3\sqrt{x}$, **12.** $y'=-\frac{13}{3x+2\ ^{2}}$,

13. $y'=\frac{4x-6x^2}{2-6x\ ^{2}}$, **14.** $y'=\frac{1-2\ln x}{x^3}$, **15.** $y'=-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}$, **16.** $y'=\frac{x^2e^x+1}{x^2}$,

17. $y'=9\ \ 2x-3x^3\ ^{8}\cdot\ 2-9x^2$, **18.** $y'=\frac{6-\sin x}{2\sqrt{6x+\cos x}}$, **19.** $y'=\cos\frac{x}{3}$,

20. $y'=10^{x^4-2x+5}\cdot\ 4x^3-2\ \cdot\ln 10$, **21.** $y'=-\frac{3x^2}{8-x^3\ \cdot\ln 3}$, **22.** $y'=-\frac{2}{\sin^2\ 2x-\pi}$,

23. $y'=2\sin 4x$ **24.** $y'=-\frac{2x\sin x^2\sin x+\cos x^2\cos x}{\sin^2 x}$, **25.** $y'=-2xe^{-x^2}\cdot\ln x+\frac{e^{-x^2}}{x}$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

MINORSKIJ, Vasilij Pavlovič. Sbírka úloh z vyšší matematiky. Praha: SNTL, 1964

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.