evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Jak vypadá graf funkce?**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_16
Pořadí DUMu v sadě	16
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**15. ledna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze využít k procvičení pojmu průběh funkce, prostřednictvím ICT může být použit i k samostatnému studiu žáků. Inovace: Sada příkladů s gradující obtížností**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

16. Jak vypadá graf funkce?

Znalost derivace funkce a její souvislosti s vlastnostmi funkce, umění počítat limity a geometricky je interpretovat a schopnost řešit pohotově rovnice a nerovnice nám umožňují vyšetřovat průběh funkce a sestrojit její graf (bez použití výpočetní techniky). Přestože je sestrojení grafu jakékoliv funkce s použitím vhodného matematického software otázkou několika okamžiků, je použití pravítka a kružítka výzvou.

V tomto učebním materiálu se budeme řídit tzv. „dvacaterem“. Jednotlivé body tohoto návodu k sestrojení grafu funkce ovšem předpokládají znalosti souvislostí diferenciálního počtu s vlastnostmi funkce.

Dvacatero k vyšetřování průběhu funkce:

1. Definiční obor
2. Parita funkce, perioda
3. Body, ve kterých není funkce definována, intervaly spojitosti
4. Jednostranné limity funkce v bodech, ve kterých není funkce definována
5. Limity v nevlastních bodech
6. Průsečíky grafu funkce s osami *x* a *y*, znaménka funkčních hodnot
7. Výpočet první derivace
8. Nulové body první derivace
9. Body, ve kterých není definována první derivace
10. Intervaly monotónnosti
11. Lokální extrémy, funkční hodnoty v těchto bodech
12. Výpočet druhé derivace
13. Nulové body druhé derivace
14. Body, ve kterých není definována druhá derivace
15. Intervaly konvexnosti a konkávnosti, kontrola extrémů
16. Inflexní body, funkční hodnoty v těchto bodech
17. Asymptoty bez směrnice
18. Asymptoty se směrnicí
19. Obor hodnot funkce
20. Sestrojení grafu funkce

Řešené příklady

Začneme funkcí polynomickou – její průběh je jednoduchý, protože definičním oborem spojité funkce je vždy množina *R*, funkce je spojitá ve svém definičním oboru, nemá asymptoty, graf lze nakreslit jedním tahem. Přesto však potřebujeme k jeho sestrojení vědět víc.

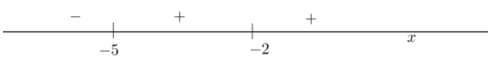
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Př. 1 Ve smyslu „dvacatera“ vyšetřete průběh dané funkce a sestrojte její graf.

$f: y=(x+2)^2(x+5)$

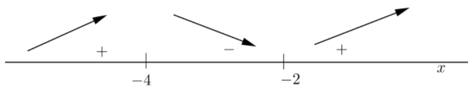
1. $D(f)=R$
2. $\forall x \in D(f)$ také $-x \in D(f)$, $f(x)=(x+2)^2(x+5)$, $f(-x)=(-x+2)^2(-x+5)$, $-f(-x)=(-x+2)^2(x-5)$, $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(-x)$, funkce není ani sudá, ani lichá; není periodická.
   Pozn.: Pokud není definiční obor symetrický podle počátku (není tedy splněna první podmínka), nemůže být funkce sudá ani lichá, není tedy třeba porovnávat funkční hodnoty v bodech x a $-x$
3. Funkce je definována $\forall x \in R$, je spojitá v $(-\infty;\infty)$
4. Vzhledem k předchozímu bodu takové limity neurčujeme
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} = (x+2)^2(x+5) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = (x+2)^2(x+5) = -\infty$
6. $y=0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x+5) \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-5$ (nulové body funkce)
   $x=0 \Leftrightarrow y=20$, tedy průsečíky s osou x jsou v bodech $X_1[-2;0]$, $X_2[-5;0]$ a průsečík s osou y je bod $Y[0;20]$. Znaménka funkčních hodnot zjistíme řešením nerovnice $(x+2)^2(x+5)>0$ resp. $(x+2)^2(x+5)<0$. Využijeme spojitosti funkce a Darbouxovy vlastnosti - nulové body funkce vyznačíme na číselné ose a určíme znaménka funkčních hodnot naší funkce v jednotlivých intervalech. Pozor, bod -2 je dvojnásobným nulovým bodem.



   Zjistili jsme, že v $(-\infty;-5)$ je graf funkce pod osou *x*, v intervalech $(-5;-2)$ a $(-2;\infty)$ je nad osou *x*, přičemž v bodě $x=-2$ se osy *x* dotkne.
7. $y'=2(x+2)(x+5)+(x+2)^2=(x+2)\left[2(x+5)+(x+2)\right]=(x+2)(3x+12)$.
   Vzhledem k dalším výpočtům je vhodné zapsat výsledek (tedy první derivaci) ve tvaru součinu.
8. $y'=0 \Leftrightarrow (x+2)(3x+12)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-4$
9. První derivace je definována $\forall x \in R$.
10. Intervaly monotónnosti rozumíme podmnožiny definičního oboru , ve kterých je funkce rostoucí ($y'>0$) resp. klesající ($y'<0$). Při řešení příslušných nerovnic

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

opět využijeme spojitosti funkce $y' = \ x+2 \ \ 3x+12 \ $ a jejích nulových bodů,



které jsme určili v bodu 8.

Šipkami naznačujeme, že v $\ -\infty; -4 \ $ a v $\ -2; \infty \ $ je funkce rostoucí, klesající je v $\ -4; -2 \ $.

11. Vzhledem k předcházejícímu bodu má funkce maximum pro $x = -4$ a minimum pro $x = -2$; velmi pěkně je to vidět na předcházejícím obrázku s naznačenými šipkami.

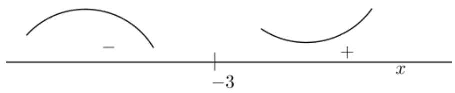
$f \ -4 \ = 4, f \ -2 \ = 0$

12. $y'' = \ 3x+12 \ + \ x+2 \ \cdot 3 = 6x+18 = 6 \ x+3 \ $. Také druhou derivaci je výhodné psát (pokud je to možné) ve tvaru součinu.

13. $y'' = 0 \Leftrightarrow 6 \ x+3 \ = 0 \Leftrightarrow x = -3$

14. Druhá derivace je definována $\forall x \in R$.

15. Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme pomocí znaménka druhé derivace; je-li $y'' > 0$, jedná se o funkci konvexní, je-li $y'' < 0$, jde o funkci konkávní. Budeme tedy opět řešit nerovnice a při jejich řešení využívat vlastnosti funkce $y'' = 6 \ x+3 \ $, která je spojitá ve svém definičním oboru. Jestliže vyznačíme nulový bod $x = -3$této funkce na číselné ose, dostáváme dva intervaly, ve kterých snadno určíme správné znaménko. Také tady je vhodné si konvexnost a konkávnost označit příslušnými obloučky.



Funkce je tedy v $\ -\infty; -3 \ $ konkávní a v $\ -3; \infty \ $ konvexní. Kontrolu extrémů, které byly zjištěny v bodu 11. provedeme tak, že určíme hodnotu druhé derivace v těchto bodech. V našem případě je $y'' \ -4 \ < 0$, pro $x = -4$ tedy skutečně nastává maximum, $y'' \ -2 \ > 0$, pro $x = -2$ je tedy potvrzeno minimum.

16. Z předcházejícího bodu vyplývá, že funkce má v bodě $x = -3$ inflexní bod, $f \ -3 \ = 2$

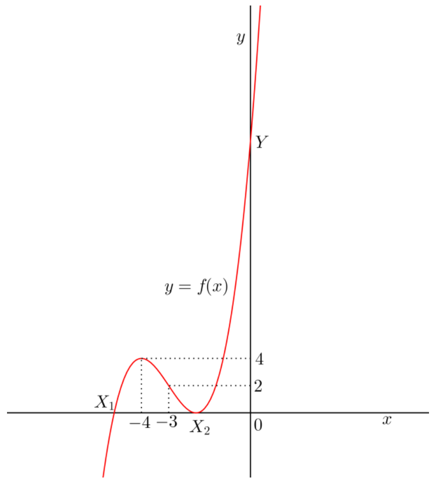
17. Funkce *f* je definována $\forall x \in R$, tedy asymptoty bez směrnice neexistují.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

18. Jedná se o funkci polynomickou, neexistují proto ani asymptoty se směrnicí; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2(x+5)}{x}=+\infty$, nejedná se tedy o limitu vlastní.

19. $H(f)=R$

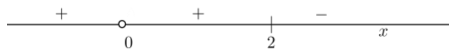
20.



Př. 2 Ve smyslu „dvacatera“ vyšetřete průběh dané funkce a sestrojte její graf. $f: y=36\frac{2-x}{x^2}$

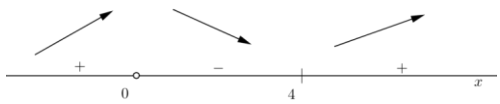
1. $D(f)=R-\{0\}$
2. $\forall x\in D(f)$ také $(-x)\in D(f)$ a snadno nahlédneme, že $f(x)\neq f(-x)$, $f(x)\neq -f(-x)$, funkce tedy není sudá ani lichá, není periodická.
3. Funkce není definována v bodě 0, je spojitá v $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$.
4. $\lim\limits_{x\to0^-}36\frac{2-x}{x^2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+}36\frac{2-x}{x^2}=+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}36\frac{2-x}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}36\frac{2-x}{x^2}=0$
6. $y=0\Leftrightarrow x=2$ (nulový bod), průsečík s osou x je tedy bod $X[2;0]$. Protože $D(f)=R-\{0\}$, osu y graf funkce neprotne. Znaménka funkčních hodnot určíme řešením nerovnice $36\cdot\frac{2-x}{x^2}>0$ resp. $36\cdot\frac{2-x}{x^2}<0$. Nulový bod a bod, který nepat-

ří do definičního oboru znázorníme na číselné ose a zjistíme znaménka v jednotlivých intervalech.



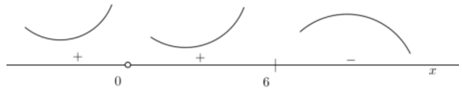
Vidíme, že graf funkce je nad osou x v intervalech $-\infty;0$ a $0;2$, pod osou x v intervalu $2;\infty$.

7. $y' = 36\dfrac{-x^2 - \ 2-x \ 2x}{x^4} = 36\dfrac{-x^2 - 4x + 2x^2}{x^4} = 36\dfrac{x^2 - 4x}{x^4} = 36\dfrac{x-4}{x^3}$
8. $y' = 0 \Leftrightarrow 36\dfrac{x-4}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 4$
9. První derivace není definována v bodě $x = 0$.
10. Intervaly monotónnosti, tedy intervaly, ve kterých je funkce rostoucí ($y' > 0$) resp. klesající ($y' < 0$) získáme řešením příslušných nerovnic. Využijeme spojitosti funkce v definičním oboru, na číselné ose si zobrazíme kromě nulového bodu první derivace také bod $x = 0$, který nepatří do definičního oboru.



Funkce *f* je rostoucí v intervalech $-\infty;0$, $4;\infty$, klesající v $0;4$.

11. Z předcházejícího obrázku usoudíme, že funkce nemá maximum (v bodě $x = 0$ není definována), má pouze minimum a to v bodě $x = 4$, $f\ 4\ = -\dfrac{9}{2}$
12. $y'' = 36\dfrac{x^3 - \ x-4\ \cdot 3x^2}{x^6} = 36\dfrac{x^3 - 3x^3 + 12x^2}{x^6} = 36\dfrac{12x^2 - 2x^3}{x^6} = 72\dfrac{6-x}{x^4}$
13. $y'' = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 6$
14. Druhá derivace není definována v bodě $x = 0$.
15. Vyznačením nulového bodu druhé derivace a bodu, který nepatří do definičního oboru funkce a s využitím spojitosti funkce v definičním oboru určíme intervaly konvexnosti ($y'' > 0$) a konkávnosti ($y'' < 0$).



Pro kontrolu extrému zjistíme znaménko druhé derivace v bodě 4. Protože $y''\ 4\ < 0$, je minimum pro $x = 4$ potvrzeno.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

16. Protože v okolí bodu 6 mění druhá derivace znaménko, je bod $x=6$ inflexním bodem funkce, $f(6)=-4$

17. Podle bodu 4. už víme, že funkce f má asymptotu bez směrnice. Protože jednostranné limity v bodě 0 jsou nevlastní, je asymptotou bez směrnice přímka o rovnici $x=0$ (osa y).

18. Má-li graf funkce asymptoty se směrnicí, pak musí existovat $a\in R$ tak, že $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ a $b\in R$ tak, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$. Pak asymptota se směrnicí má rovnici $y=ax+b$.

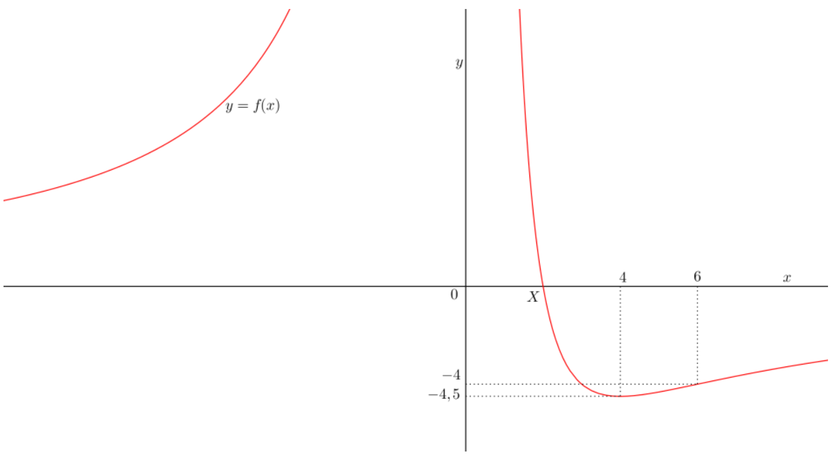
V našem případě $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{36\frac{2-x}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}36\cdot\frac{2-x}{x^3}=36\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x^3}=36\cdot 0,\ 0\in R$, dostáváme proto $a=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(36\cdot\frac{2-x}{x^2}-0\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}36\cdot\frac{2-x}{x^2}=36\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x^2}=36\cdot 0=0$, tedy i $b=0$ a asymptota se směrnicí je přímka o rovnici $y=0$ (osa x).

Pozn.: Při výpočtu předcházejících limit jsme využili toho, že stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli – limita takové funkce v nevlastním bodě je vždy rovna nule. Můžeme však také využít L´Hospitalovo pravidlo.

19. $H(f)=\left(-\frac{9}{2};\infty\right)$, obvykle určujeme obor hodnot až po sestrojení grafu funkce.

20.



Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

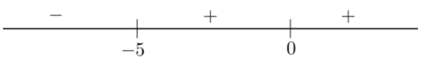
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Př. 3 Ve smyslu „dvacatera“ vyšetřete průběh dané funkce a sestrojte její graf.

$f : y = \; x+5 \; \sqrt[3]{x^2}$

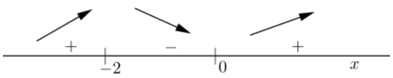
Poznámka úvodem: Pro n liché je $\sqrt[n]{x}$ definována $\forall x \in R$.

1. $D \; f \; = R$
2. $\forall x \in D \; f$ také $-x \in D \; f$, $f \; x \; \neq f \; -x$, $f \; x \; \neq -f \; -x$, funkce není sudá ani lichá, není periodická.
3. Funkce je definována $\forall x \in R$, je spojitá v $-\infty;\infty$
4. Vzhledem k předchozímu bodu takové limity neurčujeme.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \; x+5 \; \sqrt[3]{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \; x+5 \; \sqrt[3]{x^2} = -\infty$
6. $y=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=0$ (nulové body funkce), $x=0 \Leftrightarrow y=0$. Průsečíky s osou x jsou v bodech $X_1 \; -5;0$, $X_2 \; 0;0$, průsečík s osou y splývá s bodem X_2. Protože se jedná o spojitou funkci, můžeme využít Darbouxovy vlastnosti k určení intervalů, ve kterých je graf funkce nad osou x resp. pod osou x.



V intervalu $-\infty;-5$ je graf funkce pod osou x, v intervalech $-5;0$ a $0;\infty$ je nad osou x.

7. $y' = \sqrt[3]{x^2} + \; x+5 \; \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2\cdot \; x+5}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{3x+2x+10}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{5\cdot \; x+2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$
8. $y'=0 \Leftrightarrow 5\cdot \; x+2 \; = 0 \Leftrightarrow x=-2$
9. První derivace není definována pro $x=0$. V bodě $x=0$ tedy neexistuje tečna grafu funkce.
10. Řešením nerovnic $y'>0$ a $y'<0$ určíme intervaly monotónnosti .

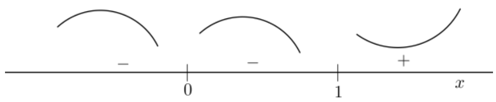


Funkce f je rostoucí v intervalech $-\infty;-2$ a $0;\infty$, klesající v $-2;0$.

11. Funkce má maximum v bodě $x=-2$, $f \; -2 \; = 3\cdot\sqrt[3]{4}$, minimum nastává v bodě $x=0$, $f \; 0 \; = 0$

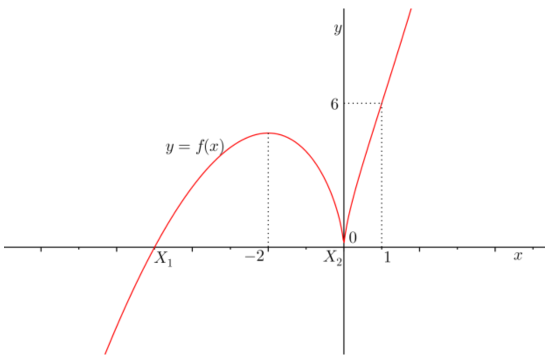
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

12. $y'' = \dfrac{15\cdot\sqrt[3]{x} - 5\cdot(x+2)\cdot 3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{9\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{15\cdot\sqrt[3]{x} - \frac{5x+10}{\sqrt[3]{x^2}}}{9\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{15x-5x-10}{9x\sqrt[3]{x}} = \dfrac{10(x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}$
13. $y'' = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
14. Druhá derivace není definována pro $x=0$.
15. Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme pomocí znaménka druhé derivace; k řešení nerovnic $y''>0$ a $y''<0$ využijeme spojitosti funkce a nulového bodu druhé derivace. Na číselné ose znázorníme i bod $x=0$, ve kterém není druhá derivace definována.



Funkce *f* je konkávní v intervalech $(-\infty;0)$ a $(0;1)$, konvexní v intervalu $(1;+\infty)$. Protože je $y''(-2)<0$, je potvrzeno maximum v bodě $x=-2$. Minimum v bodě $x=0$ nelze zkontrolovat pomocí druhé derivace, protože druhá derivace není v tomto bodě definována.

16. Bod $x=1$ je inflexním bodem funkce $f(1)=6$.
17. Vzhledem k definičnímu oboru funkce nemá asymptoty bez směrnice.
18. Protože $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, v našem případě $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+5)\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)\cdot\sqrt[3]{x^2} = +\infty$, neexistují ani asymptoty se směrnicí.
19. $H(f) = R$
20.



Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Příklady k procvičení

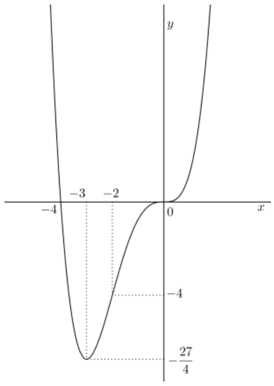
Ve všech příkladech vyšetřete průběh funkce ve smyslu dvacatera.

1. $f: y = x^3 + \frac{1}{4}x^4$
2. $f: y = 1 - 2x^2 + x^4$
3. $f: y = \frac{x^4}{10} - \frac{x^5}{50}$
4. $f: y = \frac{x}{64} \cdot \; x^2 - 7 \;^{3}$
5. $f: y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$
6. $f: y = 9 \cdot \frac{3 - x^2}{x^3}$
7. $f: y = \frac{6x - 12}{x - 3 \;^{2}}$
8. $f: y = \frac{x}{x^2 - 1}$
9. $f: y = \; x - 4 \; \sqrt[3]{x}$
10. $f: y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

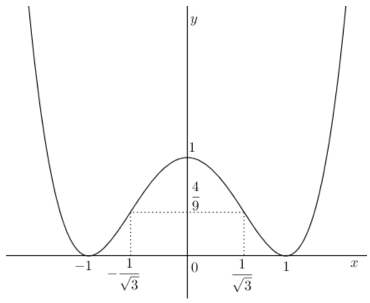
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: Řešení příkladů je ilustrováno grafem, ve kterém jsou znázorněny všechny významné body, (průsečíky s osami, extrémy, inflexní body) a asymptoty (pokud existují).

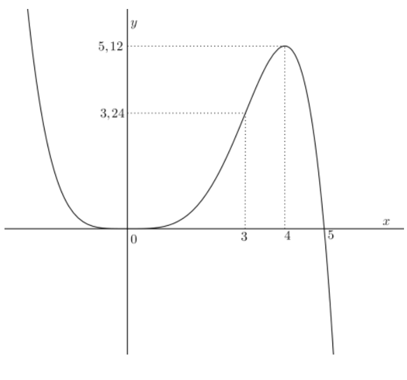
1.



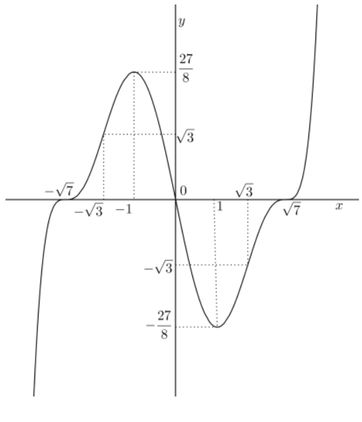
2.



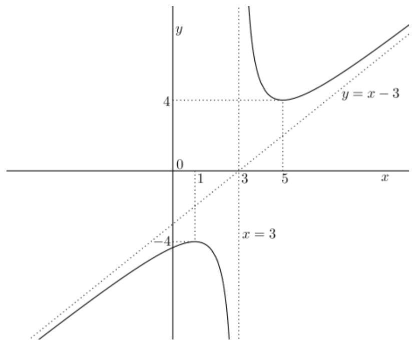
3.



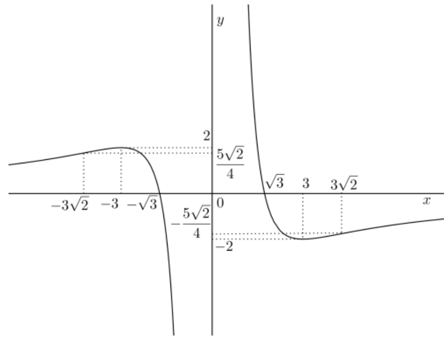
4.



5.

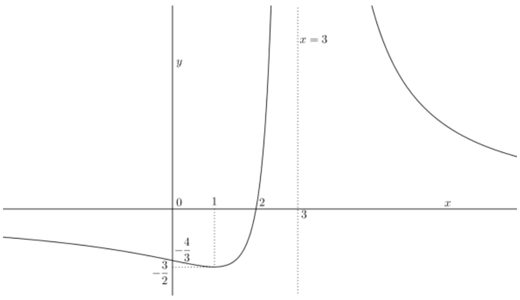


6.

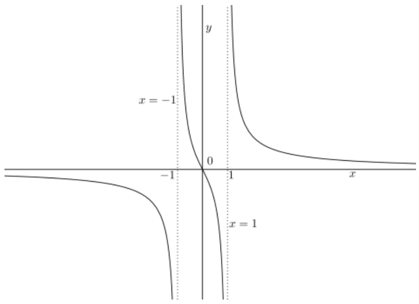


Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

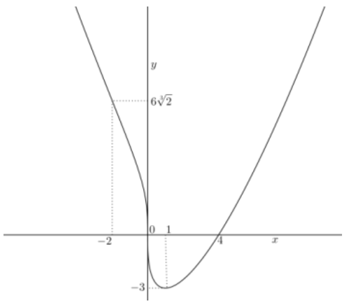
7.



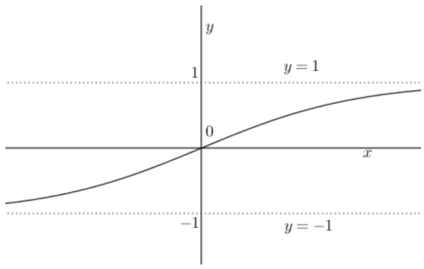
8.



9.



10.



Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

MINORSKIJ, Vasilij Pavlovič. Sbírka úloh z vyšší matematiky. Praha: SNTL, 1964

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.