evropský sociální fond v ČR   EVROPSKÁ UNIE   MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY   OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Užití diferenciálního počtu**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_17
Pořadí DUMu v sadě	17
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**9. dubna 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze využít k procvičení slovních úloh na extrémy funkce, prostřednictvím ICT může být použit i k samostatnému studiu žáků.** **Inovace: Matematizace reálné situace, příklady s ekonomickou tématikou.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

17. Užití diferenciálního počtu

Úloha na nalezení maximální nebo minimální – jedním slovem extremální – hodnoty je charakteristická pro řadu situací v geometrii, ekonomii, fyzice, chemii i pro mnoho různých dějů v přírodě. Pomocí diferenciálního počtu lze spoustu problémů z praxe, které by jinak byly neřešitelné, vyřešit poměrně snadno.

Řešené příklady

1. Ukažte, že nejekonomičtější tvar válcové konzervy s daným objemem – tj. tvar, při kterém je spotřeba materiálu na výrobu takové konzervy minimální – je ten, kde výška válce je rovna průměru podstavy (jedná se o tzv. rovnostranný válec).

Řešení: Spotřeba materiálu je dána povrchem válce, tedy $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Jedná se tedy o nalezení minimální hodnoty funkce proměnných r a v. Protože však objem válce je pevně dán, můžeme ze vzorce $V = \pi r^2 v$ jednu z proměnných vyjádřit – např. $v = \dfrac{V}{\pi r^2}$ a po dosazení do vzorce pro povrch dostaneme funkci jedné proměnné. Tedy $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. Nyní už budeme hledat užitím diferenciálního počtu minimum funkce jedné proměnné r a to tak, že první derivaci funkce položíme rovnu nule – tím dostaneme bod podezřelý z extrému. Je výhodné značit v tomto případě derivaci symbolem $\dfrac{dS}{dr}$, aby bylo jasné, podle které proměnné derivujeme. Proto

$$S' = \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2V \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Pomocí druhé derivace se snadno přesvědčíme, že se skutečně jedná o minimum.

$S'' = 4\pi + \dfrac{4V}{r^3} > 0 \, \forall r > 0$ (jedná se o poloměr – tedy kladné číslo). Po dosazení za r dostáváme

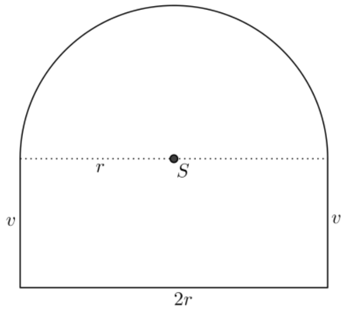
$v = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2} = \dfrac{V\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}}{\pi \dfrac{V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2r$. Potvrdili jsme tedy, že při daném objemu bude mít válec nejmenší povrch tehdy, bude-li se jednat o válec rovnostranný.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2. Průřez tunelu má tvar obdélníka s přilehlým půlkruhem. Obvod celého průřezu je $20m$. Jaký má být poloměr půlkruhu, aby obsah průřezu byl maximální?

Řešení: Podle označení v obrázku platí pro obsah průřezu: $S = 2rv + \frac{\pi r^2}{2}$



Protože podle zadání je $2r + 2v + \pi r = 20$, můžeme opět po vyjádření jedné proměnné a dosazení do vztahu pro S vyšetřovat exrém (maximum) funkce jedné proměnné.

$2r + 2v + \pi r = 20 \Leftrightarrow v = \frac{20 - 2r - \pi r}{2}$, tedy $S = r\left(20 - 2r - \pi r\right) + \frac{\pi r^2}{2} = 20r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$.

Potom $S' = \frac{dS}{dr} = 20 - 4r - 2\pi r + \pi r$.

$20 - 4r - 2\pi r + \pi r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{20}{4+\pi}$. Pomocí druhé derivace potvrdíme, že se jedná o maximum.

Protože $S'' = -4 - \pi < 0$, je tím extrém potvrzen.
Pozn.: Přibližná hodnota poloměru r je $2{,}8m$.

3. Číslo 4 vyjádřete ve tvaru součinu dvou kladných čísel, pro která bude součet jejich třetích mocnin minimální.

Řešení: Označíme-li hledaná čísla a, b, pak podle zadání platí:

$a \cdot b = 4$ a součet $s = a^3 + b^3$ má být minimální. Vyjádříme-li z prvního vztahu např. b a dosadíme do vztahu pro s, dostaneme funkci jedné proměnné a a můžeme pomocí diferenciálního počtu hledat její extrém. Tedy jestliže $b = \frac{4}{a}$, pak $s = a^3 + \left(\frac{4}{a}\right)^3$.

Určíme první derivaci této funkce $s' = \frac{ds}{da} = 3a^2 + 3\cdot\left(\frac{4}{a}\right)^2\cdot\left(-\frac{4}{a^2}\right) = 3a^2 - 3\cdot\frac{4^3}{a^4}$ a položíme ji rovnu nule. Dostáváme $3a^2 - 3\cdot\frac{4^3}{a^4} = 0 \Leftrightarrow a^6 = 4^3 \Leftrightarrow a = 2$ (vzhledem k podmínce, že se má jednat o

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

o čísla kladná). Hodnota druhé derivace $s'' = 6a + 3 \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{a^5}$ je pro kladná a vždy číslo kladné, jedná se tedy o minimum.
Je-li $a = 2$, pak ze vztahu $a \cdot b = 4$ plyne, že také $b = 2$ a tím je úloha vyřešena.

Příklady k procvičení

1. Sedmdesát metrů dlouhým pletivem se má ohradit obdélníkový výběh pro kuřata, jednou stranou přiléhající ke stěně kůlny. Jaké musí být rozměry výběhu, aby měl co největší obsah?
2. Číslo 139 rozdělte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.
3. Součet dvou čísel je 12. Určete tato čísla tak, aby součin jednoho s třetí mocninou druhého byl maximální.
4. Nádrž na vodu o objemu $256\,m^3$ má mít čtvercové dno. Vypočítejte její rozměry tak, aby spotřeba materiálu na vyzdění jejích stěn a dna byla nejmenší.
5. Krabice tvaru kvádru má mít dvojnásobnou délku než šířku. Jaký bude její nejmenší povrch (včetně víka), má-li mít objem $72\,m^3$?
6. Stanovte rozměry sila tvaru válce, které má při daném objemu $V = 1000\,m^3$ nejmenší povrch (silo není shora uzavřeno).
7. V 8 hodin ráno vyjelo osobní auto rychlostí $80\,km/hod$ ke křižovatce vzdálené $125\,km$ na východ a ve stejném okamžiku z této křižovatky odjíždělo nákladní auto rychlostí $40\,km/hod$ směrem na sever (obě rychlosti jsou konstantní). V kolik hodin budou mít tato auta od sebe nejmenší vzdálenost a jaká tato vzdálenost bude?
8. Drát dlouhý $12\,cm$ se má rozdělit na dva kusy – přitom první se ohne do tvaru kružnice a druhý do tvaru čtverce. Určete poloměr kružnice a délku strany čtverce tak, aby součet obsahů příslušného kruhu a čtverce byl minimální.
9. Na parabole o rovnici $y = \frac{x^2}{4}$ najděte bod, jehož vzdálenost od bodu $A[1;2]$ je minimální. Určete tuto vzdálenost.
10. Farmář chce rozdělit 10 hektarů své půdy podél řeky na 8 dílů plotem rovnoběžným s řekou a devíti ploty na řeku kolmými. Určete rozměry nových pozemků tak, aby na jejich oplocení spotřeboval co nejméně pletiva.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: 1. $17{,}5m, 35m$, **2.** $\frac{139}{2}, \frac{139}{2}$, **3.** 3 a 9, **4.** $8m \times 8m \times 4m$, **5.** $108m^2$, **6.** $r = v = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$,

7. v $9hod\,15min$, $55{,}9km$, **8.** $r = \frac{6}{4+\pi}$, $a = 2r$, **9.** $X[2;1]$, $v = \sqrt{2}$, **10.** $\frac{100}{3}m \times \frac{37}{2}m$

Zdroje:
HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4
Gillman, Leonard a Robert H. McDowell. Matematická analýza. Praha: SNTL, 1983.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu. Dílo smí být dále šířeno pod licencí CC BY-SA (www.creativecommons.cz).

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.