INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Primitivní funkce – přímá integrace**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_18
Pořadí DUMu v sadě	18
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**4. března 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze využít k nácviku určování primitivní funkce, prostřednictvím ICT může být použit i k samostatnému studiu žáků.** **Inovace: Sada příkladů s gradující obtížností**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

18. Naučme se integrovat

Stejně jako u derivace funkce je nutným předpokladem toho, abychom se naučili integrovat - tedy abychom k dané funkci f našli takovou funkci F, jejíž derivace (v každém bodě nějaké množiny) byla funkce f - znalost základních vzorců a pravidel. Funkci F nazýváme funkcí primitivní k funkci f a používáme označení $\int f(x)\,dx = F(x)$. Protože víme, že derivace konstanty je nula, píšeme $\int f(x)\,dx = F(x) + C, C \in R,$ k dané funkci tedy existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší o konstantu. Aby funkce F existovala, musí být funkce f v příslušném intervalu spojitá.

Tabulka základních primitivních funkcí:

$$\int 0\,dx = C, x \in R$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C, x \in R$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in (0;\infty), n \in R - \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C, x \in R - \{0\}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, x \in R$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in R$$

$$\int sin\,x\,dx = -cos\,x + C, x \in R$$

$$\int cos\,x\,dx = sin\,x + C, x \in R$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\,x + C, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotg\,x + C, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in Z$$

Jsou-li f, g dvě funkce, ke kterým existují funkce primitivní, pak

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Je-li k libovolná konstanta, pak

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx.$$

Obecně: $\int\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)\right]dx = k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx$.

Výhodou, kterou můžeme využít při řešení příkladů, je možnost zkoušky – tedy to, že $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

Řešené příklady

Ve všech případech určete k dané funkci funkci primitivní, tedy vypočtěte dané integrály v intervalech, ve kterých jsou obě funkce definovány:

1. $\int\left(2+\frac{3}{x}\right)^2 dx$

   Využijeme pravidlo o integraci součtu i pravidlo o vytknutí konstanty, nejprve však výraz za integračním znakem upravíme:

   $$\int\left(2+\frac{3}{x}\right)^2 dx = \int\left(4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}\right)dx = 4\int dx + 12\int\frac{1}{x}dx + 9\int x^{-2}dx = 4x + 12\ln x + 9\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

   $$= 4x + 12\ln x - \frac{9}{x} + C$$

2. $\int\frac{\sqrt[5]{x^2}-2x}{x^3}dx$

   Abychom mohli využít pravidlo o integraci rozdílu, vydělíme čitatele jmenovatelem, odmocniny zapíšeme ve tvaru mocniny s racionálním exponentem a budeme dělit mocniny se stejným základem.

   $$\int\frac{\sqrt[5]{x^2}-2x}{x^3}dx = \int\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \int x^{-\frac{13}{5}}dx - 2\int x^{-2}dx = \frac{x^{-\frac{8}{5}}}{\left(-\frac{8}{5}\right)} - 2\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

   $$= -\frac{5}{8\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{x} + C$$

3. $\int\frac{cotg^2 x}{3}dx$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Konstantu vytkneme před integrační znak a funkci za integračním znakem upravíme pomocí vzorců z trigonometrie. Vydělíme pak čitatele jmenovatelem a můžeme použít vzorců z tabulky.

$$\int \frac{cotg^2 x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{cos^2 x}{sin^2 x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1-sin^2 x}{sin^2 x}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx - \int dx\right] = \frac{1}{3}\ \ -cotg\,x - x\ \ + C$$

4. $\int \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$

Výraz za integračním znakem nejprve umocníme a pak využijeme vzorců z trigonometrie.

$$\int \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} \right) dx = \int\ 1 - sin\,x\ \ dx\ = x + cos\,x + C$$

5. $\int \left(\frac{e^x}{10} - 10^{x+2} \right) dx$

Využijeme pravidlo o integraci rozdílu, vytkneme konstantu a upravíme mocninu. Dostaneme

$$\int \left(\frac{e^x}{10} - 10^{x+2} \right) dx = \frac{1}{10}\int e^x\,dx - 10^2 \int 10^x dx = \frac{1}{10}e^x - 10^2\frac{10^x}{ln10} + C = \frac{e^x}{10} - \frac{10^{x+2}}{ln10} + C$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte:

1. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3}\,dx$
2. $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$
3. $\int\ x-1\ \sqrt[4]{x}\,dx$
4. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$
5. $\int \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$
6. $\int \left(4e^x - \frac{5^x}{2} \right) dx$
7. $\int\ 2^{x+1} + 3^{x+1}\ \ dx$
8. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$
9. $\int \frac{cos\,2x}{5cos^2 x}\,dx$
10. $\int \frac{1-sin^3 x}{sin^2 x}\,dx$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: 1. $\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$, **2.** $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$, **3.** $4\sqrt[4]{x}\left(\frac{x^2}{9}-\frac{x}{5}\right)+C$, **4.** $\frac{x^2}{2}+x+C$,

5. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$, **6.** $4e^x-\frac{5^x}{2\ln 5}+C$, **7.** $2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$, **8.** $3x-2\cdot\frac{1{,}5^{\ x}}{\ln 1{,}5}+C$,

9. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}tgx+C$, **10.** $\cos x-\cot g\, x+C$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.