evropský sociální fond v ČR — EVROPSKÁ UNIE — MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY — OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Integrační metody**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_19
Pořadí DUMu v sadě	19
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**8. března 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Materiál lze použít k nácviku výpočtu neurčitých integrálů pomocí metody per partes a metody substituční, prostřednictvím ICT lze využít také k samostatnému studiu žáků. Inovace: Snaha o pochopení nutnosti použití metod na různých typech příkladů.**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

19. Integrační metody

Je mnoho funkcí, ke kterým neumíme nalézt funkci primitivní pouhými úpravami a převedením na základní tabulkové integrály. Existují však metody, které nám to umožní. Jedná se o metodu per partes (po částech), která vychází z derivace součinu a metodu substituční, založenou na derivaci funkce složené. Použití obou metod nám umožňuje převést výpočet integrálů, které neumíme spočítat, na integrály jednodušší, které už vyřešit umíme.
Metoda per partes se dá symbolicky zapsat takto:
$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ resp. (což je totéž) $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$, kde u, v jsou funkce proměnné x a u', v' jsou jejich derivace.
Metoda substituční spočívá v zavedení nové proměnné:
$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C$, kde $t = g(x)$ je nově zavedená proměnná.
Obě metody lze při řešení jedné úlohy použít opakovaně (př. 3) a obě metody lze při řešení jedné úlohy kombinovat (př. 10).

Řešené příklady

1. $\int x^2 \cdot ln\,x\,dx$

   Jde o integrál součinu dvou funkcí, který zatím vyřešit neumíme. Úlohu budeme řešit metodou per partes - jde o to vhodně zvolit funkce u, v' (nebo u', v) tak, abychom ji převedli na úlohu, kterou vyřešit umíme. V tomto případě je volba jednoznačná (známe derivaci funkce $ln\,x$, neznáme její integrál) – tedy položíme $v = ln\,x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, pak zbývá $u' = x^2 \Rightarrow u = \frac{x^3}{3}$. Po dosazení do vztahu $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$ dostáváme

   $$\int x^2 \cdot ln\,x\,dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\,x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\,x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\,x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C =$$
   $$= \frac{x^3}{3} \cdot \left(ln\,x - \frac{1}{3} \right) + C$$

2. $\int log_a x\,dx$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vždy můžeme položit $v'=1$ a řešit daný integrál metodou per partes. Tedy pro $v'=1$ $\Rightarrow v=x$, $u=log_a x \Rightarrow u'=\dfrac{1}{x\cdot ln\,a}$. Po dosazení máme

$$\int log_a x\,dx = x\cdot log_a x-\int x\cdot\frac{1}{x\cdot ln\,a}dx = x\cdot log_a x-\int\frac{1}{ln\,a}dx = x\cdot log_a x-\frac{1}{ln\,a}\int dx =$$

$= x\cdot log_a x-\dfrac{x}{ln\,a}+C$ (uvědomte si, že $\dfrac{1}{ln\,a}$ je konstanta).

3. $\displaystyle\int\frac{9dx}{{3x-5}^{\;4}}$

V tomto případě najdeme primitivní funkci pomocí substituce. Zavedeme novou proměnnou $t=3x-5$. Je potřeba si uvědomit, že pomocí nově zavedené proměnné musíme vyjádřit i dx. Využijeme k tomu označení derivace funkce t' ve tvaru $\dfrac{dt}{dx}$. Tedy v našem případě $\dfrac{dt}{dx}=3\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{3}$. Po důsledném dosazení dostaneme integrál, který dokážeme spočítat. Primitivní funkci proměnné t v závěru opět převedeme na funkci proměnné x.

$$\int\frac{9dx}{{3x-5}^{\;4}}=9\int\frac{\frac{dt}{3}}{t^4}=3\int t^{-4}dt=3\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{t^3}+C=-\frac{1}{{3x-5}^{\;3}}+C$$

4. $\displaystyle\int\frac{4dx}{cos^2\;3-5x}$

Opět budeme řešit substitucí, po zavedení nové proměnné dostaneme integrál, který dokážeme spočítat.

$$t=3-5x\Rightarrow\frac{dt}{dx}=-5\Rightarrow dx=-\frac{dt}{5}$$

$$\int\frac{4dx}{cos^2\;3-5x}=4\int\frac{-\frac{dt}{5}}{cos^2 t}=-\frac{4}{5}\int\frac{dt}{cos^2 t}=-\frac{4}{5}\cdot tg\,t+C=-\frac{4}{5}\cdot tg\;\;3-5x\;\;+C$$

5. $\displaystyle\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nová proměnná $t = e^x + 1$ převede daný integrál na základní tabulkový integrál, protože ze vztahu $\frac{dt}{dx} = e^x$ okamžitě plyne $dt = e^x dx$. Tedy

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{dt}{t} = ln\left| t \right| + C = ln\left| e^x + 1 \right| + C = ln\ \ e^x + 1\ \ + C\ \ (e^x + 1 > 0 \forall x \in R)$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte:

1. $\int \frac{x}{2} \cdot cos\, x\, dx$
2. $\int \frac{ln\, x}{7} dx$
3. $\int x^2 \cdot e^x\, dx$
4. $\frac{dx}{3x+5\ \ ^{7}}$
5. $\int \frac{6sin\, x}{1+3cos\, x} dx$
6. $\int 3x^2 e^{x^3} dx$
7. $\int 5^{2x-3} dx$
8. $\int \frac{dx}{x \cdot\ \ 1 + ln\, x}$
9. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}$
10. $\int \frac{x}{cos^2 x} dx$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výsledky: **1.** $\frac{x}{2} \cdot sin\, x + \frac{1}{2} \cdot cos\, x + C$, **2.** $\frac{1}{7}\ \ x \cdot ln\, x - x\ \ + C$, **3.** $e^x\ \ x^2 - 2x + 2\ \ + C$,

4. $-\frac{1}{18 \cdot\ \ 3x+5\ \ ^6} + C$, **5.** $-2ln\left|1+3cos\, x\right| + C$, **6.** $e^{x^3} + C$, **7.** $\frac{5^{2x-3}}{2 \cdot ln5} + C$, **8.** $ln\left|1+ln\, x\right| + C$,

9. $-\frac{1}{x+3} + C$, **10.** $x \cdot tg\, x - ln\left|\, cos\, x\,\right| + C$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu. Dílo smí být dále šířeno pod licencí CC BY-SA (www.creativecommons.cz).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.