evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	**Užití integrálního počtu v geometrii**
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_13_20
Pořadí DUMu v sadě	20
Vedoucí skupiny/sady	**Helena Hufová**
Datum vytvoření	**19. března 2013**
Jméno autora	**Miluše Hrubá**
Ročník studia	**čtvrtý**
Předmět nebo tematická oblast	**Matematika**
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	**Ukázka aplikací určitého integrálu, prostřednictvím ICT (software Geogebra) lze ukázat souvislost výpočtů s geometrickou interpretací.** **Inovace: Geometrické souvislosti, čtení grafu.**

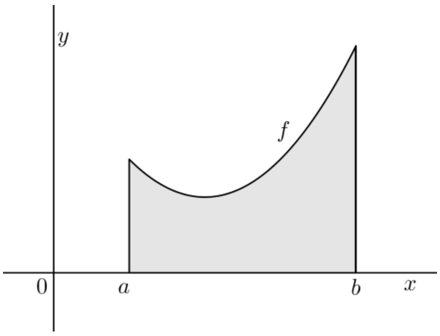
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

20. Užití integrálního počtu v geometrii

Aplikace určitého integrálu jsou velmi bohaté – jde o užití nejen v matematice a fyzice, ale i v dalších přírodních vědách a různých technických disciplínách, v teorii pravděpodobnosti, v biomedicínském inženýrství apod.
Znalost výpočtů primitivních funkcí a výpočtů určitých integrálů a znalost vzorců nám umožní poměrně snadno určit např. obsah rovinných útvarů a objem rotačních těles, které bychom jinak spočítat neuměli.
Dříve než začneme počítat, měli bychom si situaci znázornit v kartézské soustavě souřadnic Oxy.

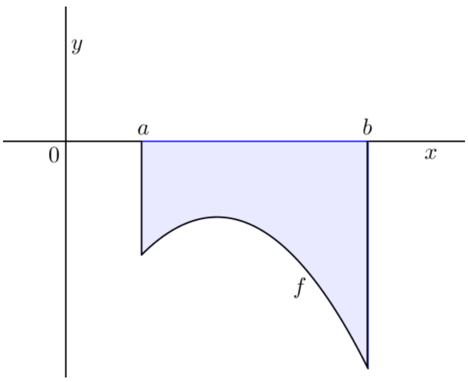
Při výpočtu obsahu rovinného útvaru se nejčastěji setkáme s těmito případy: útvar je omezen grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a, x = b$.

1. Funkce f je spojitá a nezáporná $\forall x \in \langle a;b \rangle$.



$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

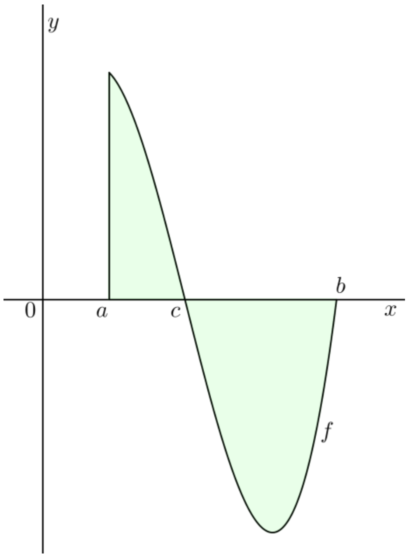
2. Funkce f je spojitá a nekladná $\forall x \in \langle a;b \rangle$.



$$S = -\int_a^b f(x)\, dx = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

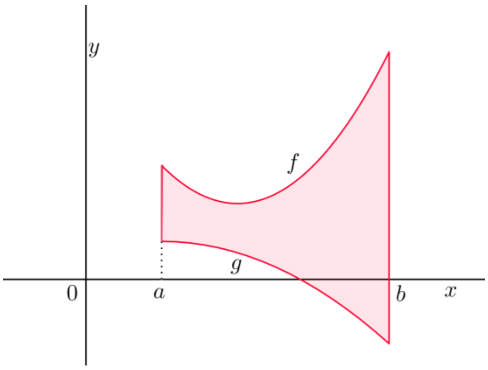
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

3. Spojitá funkce f nabývá v $\langle a;b\rangle$ nezáporných i nekladných hodnot.



$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

4. Útvar je omezen dvěma spojitými funkcemi f, g, $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in\langle a;b\rangle$.



$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

Při výpočtu objemu je nejčastější případ, že rotační těleso vznikne rotací obrazce, který je omezen grafem spojité a nezáporné funkce f, osou x a přímkami $x=a, x=b$. Pak objem tělesa

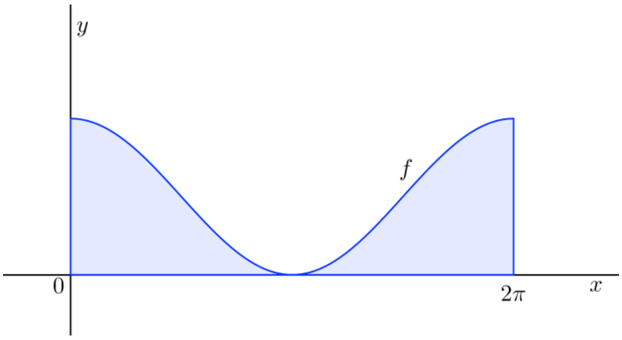
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Řešené příklady

1. Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a grafem funkce $f: y = \cos x + 1, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

   Nejdříve si situaci znázorníme v soustavě souřadnic Oxy.

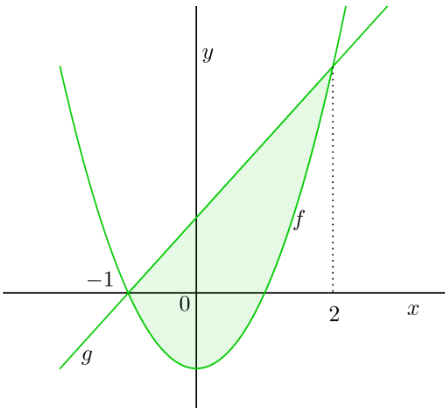


Funkce f splňuje podmínku nezápornosti v $\langle 0; 2\pi \rangle$, obsah modře vybarveného útvaru můžeme tedy počítat jako $\int_0^{2\pi} \cos x + 1 \; dx$. Tedy

$$S = \int_0^{2\pi} \cos x + 1 \; dx = \; \sin x + x \; \Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi + 2\pi - \; \sin 0 + 0 \; = 2\pi \quad j^2$$

2. Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a grafy funkcí $f: y = x^2 - 1, \; g: y = x + 1.$

   Opět začneme tím, že situaci načrtneme v kartézské soustavě souřadnic.



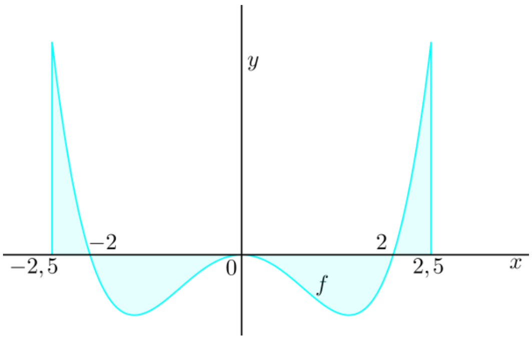
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obrazec, jehož obsah máme spočítat, je omezen grafy obou funkcí. Jejich průsečíky získáme řešením rovnice $x^2-1=x+1$. Jedná se o rovnici kvadratickou, kterou můžeme napsat ve tvaru $(x-2)(x+1)=0$. Jejími kořeny jsou čísla $x=2 \vee x=-1$, což jsou meze určitého integrálu, pomocí kterého budeme obsah počítat. Protože $\forall x \in \langle -1;2 \rangle$ je $g(x) \geq f(x)$, je obsah

$$S=\int_{-1}^{2}\left[x+1-(x^2-1)\right]dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\ (j^2)$$

3. Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a grafem funkce $f: y=x^4-4x^2$, $x \in \langle -2,5;2,5 \rangle$.

Začneme náčrtkem, vzhledem k zadání očekáváme obrazec souměrný podle osy y.



Protože část grafu zasahuje pod osu y, spočítáme průsečíky grafu funkce s osou x - rovnice $x^4-4x^2=0$ má tři řešení, a to $x=0, x=-2, x=2$, jak vidíme na obrázku (číslo 0 je kořenem dvojnásobným). Protože shodné útvary mají shodné obsahy, pak vzhledem k souměrnosti platí:

$$S=2\left(-\int_{0}^{2}(x^4-4x^2)\,dx+\int_{2}^{2,5}(x^4-4x^2)\,dx\right)==2\left(-\left[\frac{x^5}{5}-4\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^5}{5}-4\frac{x^3}{3}\right]_{2}^{2,5}\right)=$$

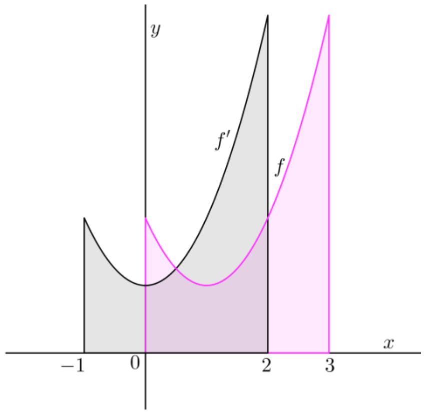
$$=2\left(-\left[\frac{32}{5}-\frac{32}{3}\right]+\left[\frac{2,5^5}{5}-4\frac{2,5^3}{3}-\left(\frac{32}{5}-\frac{32}{3}\right)\right]\right)=14,4625\ (j^2)$$

Poznámka: Tohoto postupu s výhodou využíváme nejen u výpočtů obsahů útvarů, které jsou omezeny grafem funkce sudé, ale i liché – pokud ovšem jsou i meze určitého integrálu souměrné podle počátku. Samotný výpočet je vždy jednodušší, je-li jedna z mezí číslo 0.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

4. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného osou x a grafem funkce $f: y = (x-1)^2 + 1,\ x \in \langle 0; 3 \rangle$.

Znázorníme si situaci v soustavě souřadnic Oxy. Všimněme si, že posunutím obrazce (červeného) ve směru osy x se obsah tohoto obrazce, ale ani objem rotačního tělesa při rotaci kolem osy x nezmění. Můžeme si tedy vybrat a uvažovat danou funkci f nebo funkci $f': y = x^2 + 1,\ x \in \langle -1; 2 \rangle$.



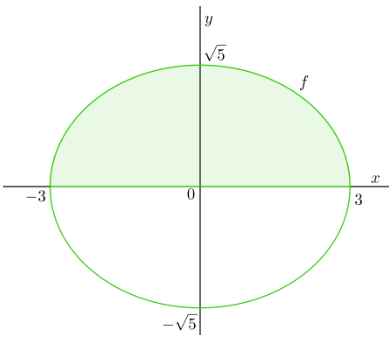
Použijeme-li danou funkci f, pak

$$V = \pi \int_0^3 \left[(x-1)^2 + 1 \right]^2 dx = \pi \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 \right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 4x \right]_0^3 = \pi \left(\frac{243}{5} - 81 + 72 - 36 + 12 \right) = \frac{78}{5}\pi \ \ j^3$$

5. Rotací kuželosečky s analytickým vyjádřením $5x^2 + 9y^2 = 45$ kolem osy x vznikne rotační těleso. Načrtněte danou kuželosečku a vypočtěte objem rotačního tělesa.

Daná kuželosečka je elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic a hlavní osou v ose x. Hlavní poloosa $a = 3$, vedlejší poloosa $b = \sqrt{5}$.



Rotací vybarvené části kolem osy x vznikne těleso, které nazýváme rotační elipsoid vejčitý.

Pro $y \geq 0$ je elipsa grafem funkce $f: y = \sqrt{5 - \frac{5}{9}x^2}$, můžeme tedy spočítat objem tělesa podle uvedeného vzorce. Využijeme-li toho, že je elipsa souměrná podle osy y, pak

$$V = 2\pi \int_0^3 \left(\sqrt{5 - \frac{5}{9}x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9}x^2 \right) dx = 2\pi \left[5x - \frac{5}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 2\pi \ \ 15 - 5 \ \ = 20\pi \ \ j^3$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a grafy funkcí:

1. $f: y = 4x - x^2$
2. $f: y = x^2 - 2x$
3. $f: y = 4x - x^2$ a $g: y = x^2 - 2x$
4. $f: y = x^2 - 4x + 5,\ x \in \langle 0; 3 \rangle$
5. $f: y = \frac{1}{x}\ x \in \langle 1; e \rangle$
6. $f: y = x^2 + 2, g: y = 8 - x$ a osou y
7. $f: y = \frac{x^2}{3}, g: y = \frac{2}{3}x + 1$

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného osou x a grafem funkce:

8. $f: y = 2 - x, x \in \langle -1; 1 \rangle$
9. $f: y = 1 - x^2, x \in \langle -2; 1 \rangle$
10. $f: y = tg\, x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výsledky: 1. $\frac{32}{3}$, **2.** $\frac{4}{3}$, **3.** 9, **4.** 6, **5.** 1, **6.** $\frac{74}{3}$, **7.** $\frac{32}{9}$, **8.** $\frac{26}{3}\pi$, **9.** $\frac{18}{5}\pi$, **10.** $\frac{4\pi-\pi^2}{2}$

Zdroje:

HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-210-4

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-099-3

Ostatní neocitované objekty (užité v tomto digitálním učebním materiálu) jsou dílem autora vytvořené programem Geogebra.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.