evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Digitální učební materiál

| | |
|---|---|
| **Číslo projektu** | CZ.1.07/1.5.00/34.0802 |
| **Název projektu** | Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT |
| **Číslo a název šablony klíčové aktivity** | III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT |
| **Příjemce podpory** | Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452 |

| | |
|---|---|
| **Název DUMu** | Základní operace s maticemi typu (2,2) |
| **Název dokumentu** | VY_32_INOVACE_14_01 |
| **Pořadí DUMu v sadě** | 1 |
| **Vedoucí skupiny/sady** | RNDr. Dag Hrubý |
| **Datum vytvoření** | 1. února 2013 |
| **Jméno autora** | Dag Hrubý |
| **e-mailový kontakt na autora** | hruby@gymjev.cz |
| **Ročník studia** | 3. |
| **Předmět nebo tematická oblast** | Seminář z matematiky – Matice a determinanty |
| **Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce** | Materiál obsahuje teoretickou přípravu a větší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o sčítání a odčítání matic typu (2,2) a násobek matice (2,2) reálným číslem. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat větší množství původních příkladů a netradiční přístup k výkladu lineární algebry. |

*kapitola 1*

## MATICE TYPU $(2,2)$

Maticí $A$ typu $(2,2)$ rozumíme čtvercové schéma čísel o dvou řádcích a dvou sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Čísla $a, b, c, d$ nazýváme také prvky matice. Prvky $a, b$ leží v prvním řádku matice a prvky $c, d$ leží v druhém řádku matice a podobně prvky $a, c$ leží v prvním sloupci matice a prvky $b, d$ leží ve druhém sloupci matice. O prvcích $a, d$ řekneme, že leží na hlavní diagonále dané matice.
O maticích

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

řekneme, že se rovnají, je-li splněna následující podmínka

$$a = u \wedge b = v \wedge c = x \wedge d = y.$$

Rovnost matic $A, B$ zapisujeme $A = B$.

Je-li dána matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pak matici $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ nazýváme matici transponovanou k matici $A$. První sloupec matice $A^T$ tvoří první řádek matice $A$ a druhý sloupec matice $A^T$ tvoří druhý řádek matice $A$.

### SOUČET DVOU MATIC

Jsou-li dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

pak jejich součtem je matice $C$, pro kterou platí

$$C = \begin{pmatrix} a+u & b+v \\ c+x & d+y \end{pmatrix}$$

Součet matic $A, B$ zapisujeme ve tvaru $A + B = C$.

Úloha 1
Určete součet matic $A, B$ je-li dáno

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Řešení:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

*Poznámka.V dalším textu, pokud nebude řečeno jinak, budeme vždy pod pojmem matice rozumět matici typu* $(2, 2)$.

Pokusme se nyní hledat analogie mezi sčítáním matic typu $(2, 2)$ a sčítáním reálných čísel. Víme, že součet každých dvou reálných čísel je reálné číslo. Na základě definice součtu dvou matic můžeme podobně prohlásit, že součet dvou matic je matice. Odborněji řečeno, množina všech matic typu $(2, 2)$ je uzavřena vzhledem k operaci sčítání matic. Dále je známo, že operace sčítání reálných čísel je asociativní. Zkuste si sami ověřit, že pro každé tři matice $A, B, C$ platí

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Pro každé reálné číslo $a \in R$ platí $a + 0 = 0 + a = a$. Číslo nula nazýváme neutrálním prvkem vzhledem k operaci sčítání. Nyní určíme neutrální prvek vzhledem k operaci sčítání matic. Budeme řešit rovnici

$$A + X = A$$

Položíme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\begin{pmatrix} a + u & b + v \\ c + x & d + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Z rovnosti dvou matic ihned dostáváme

$$\begin{array}{ll} a + u = a & b + v = b \\ c + x = c & d + y = d \end{array}$$

Odtud snadno plyne $u = v = x = y = 0$. Pro matici $X$ pak platí

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice $X$ je neutrálním prvkem vzhledem k operaci sčítání matic. Tuto matici nazýváme nulovou maticí a značíme $O$. Pro každou matici $A$ platí

$$A + O = A.$$

Ke každému reálnému číslu $a$ existuje číslo $(-a)$ takové, že platí $a + (-a) = 0$. Číslo $(-a)$ se nazývá číslo opačné k číslu $a$. V případě sčítání matic budeme hledat matici $Y$, pro kterou platí

$$A + Y = O$$

Podobně jako v předcházejícím případě položíme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

Z rovnosti dvou matic po dosazení do dané rovnice ihned dostáváme

$$\begin{array}{ll} a + u = 0 & b + v = 0 \\ c + x = 0 & d + y = 0 \end{array}$$

Odtud snadno plyne $u = -a, v = -b, x = -c, y = -d$. Pro matici $Y$ pak platí

$$Y = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Matici $Y$ nazýváme maticí opačnou k matici $A$ a značíme ji $-A$. Zřejmě platí

$$A + (-A) = O$$

Pro každá reálná čísla $a, b$ platí $a + b = b + a$, sčítání reálných čísel je komutativní. Sami se přesvědčte, že sčítání matic je rovněž komutativní. Pro každé dvě matice $A, B$ platí

$$A + B = B + A$$

CVIČENÍ 1

**Cvičení 1.1**
Sečtěte, je-li to možné.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -\pi \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \log 100 & \log 0,1 \\ \log \frac{1}{100} & \log 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln e & \ln e^2 \\ \ln 1 & \ln \sqrt{e} \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} \log 20 & \log_3 \frac{9}{2} \\ \log_2 4 & \log_4 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log 5 & \log_3 2 \\ \log_2 2 & \log_4 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} \sin \pi & \sin \frac{\pi}{4} \\ \cos \pi & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi & \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \pi & \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 2b \\ 1 & a \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ x-1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.2**
Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3x \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Na součtu matic $A + B$ a $B + A$ doložte komutativnost sčítání matic.
b) Na maticích $A, B, C$ doložte asociativní zákon pro sčítání matic.

**Cvičení 1.3**
a) Je-li $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, určete matici $X$ tak, aby platilo $A + X = O$, kde $O$ je nulová matice.

b) Je-li $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, určete matici $X$ tak, aby platilo $A + X = E$, kde $E$ je jednotková matice.

c) Je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,určete matici $X$ tak, aby platilo $A + X = B$.

d) Určete matici $X$, jestliže platí $E + X = O$, kde $E$ je jednotková a $O$ je nulová matice.

**Cvičení 1.4**
Určete hodnotu x v rovnici:

a) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{3}{2}\pi \\ \cos \pi & \sin 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{3}{2}\pi \\ \sin \pi & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.5**
Určete prvky $a, b, c, d$ tak, aby platila rovnost:

a) $\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 2 \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & d \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ \log 10^c & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 6 & d \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.6**
Pomocí sčítání matic lze vytvořit jednoduchou šifrovací metodu. Uvažujte českou abecedu $a, b, c, d, e, f, g, h, ch, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ a určené součty/rozdíly považujte za "posuny" písmen v abecedě (např. $b + 3 = e$;$g - 3 = d$ apod.).
Klíč (zde matice, kterou sečteme se šifrovací maticí) je $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Dešifrujte:

a) $\begin{pmatrix} c & e \\ l & a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} f & k \\ b & i \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.7**

Na matici 2x2 je možno pohlížet také jako na dvojici souřadnic bodů (orientovanou úsečku, vektor) v souřadném systému 0xy. Např. matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ představuje zápis 2 bodů $A[1,2]$ a $B[3,4]$, popř. orientovanou úsečku **AB**.

Zkoumejte, "co se bude dít" s orientovanou úsečkou **CD**, která je určena maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, jestliže k této matici přičteme:

a) nulovou matici $O$

b) jednotkovou matici $E$

c) matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) matici $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) matici $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

f) matici $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

NÁSOBENÍ MATIC REÁLNÝM ČÍSLEM

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a reálné číslo $k$. Matici

$$B = kA = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

nazýváme $k-$násobkem matice $A$.

Násobit matici reálným číslem znamená vynásobit tímto číslem všechny prvky dané matice.

CVIČENÍ 2

**Cvičení 2.1**

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

a) $3A$
b) $-2B$
c) $0A$
d) $\pi A$
e) $3A + 2B + C$
f) $3(A + B)$
g) $\frac{1}{2}A$
h) $(A + B + C) : 2$

**Cvičení 2.2**

Na libovolném skaláru $k$ doložte, že platí:

a) $k \cdot E = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$; kde $E$ je jednotková matice

b) $k \cdot O = O$; kde $O$ je nulová matice

c) $k \cdot E + k \cdot O = k \cdot E$; kde $E$ je jednotková a $O$ nulová matice

**Cvičení 2.3**

Vypočtěte:

a) $\pi \cdot \begin{pmatrix} \sin\pi & \cos\pi \\ \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

b) $\ln e \cdot \begin{pmatrix} \ln 1 & \ln e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} 10^4 & 10^2 \\ \frac{1}{10} & 100 \end{pmatrix}$

d) $2 \cdot \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

**Cvičení 2.4**

Určete $x$ tak, aby platilo:

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 6 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2x & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$

**Cvičení 2.5**

Na maticích $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a skaláru $k = \sqrt{2}$ ukažte, že platí:

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

**Cvičení 2.6**

Určete prvky $a, b, c, d$ tak, aby platila rovnost:

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4a \\ -a & 12 \end{pmatrix}$

b) $-1 \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} b & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & c \\ b & d \end{pmatrix}$

**Cvičení 2.7**

Uvažujme, že matice $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ určuje dvojici bodů $A[1,2]$ a $B[3,4]$ a matice $\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ určuje dvojici bodů $C[2,3]$ a $D[-1,2]$ (obdobně jako ve Cvičení 1.7).

a) Zkoumejte, "co se bude dít" s orientovanou úsečkou $\mathbf{AB}$, jestliže matici, která ji určuje:

- a1) znásobíme 2
- a2) znásobíme -1
- a3) znásobíme -2
- a4) sečteme s dvojnásobkem jednotkové matice $E$

b) Zjistěte vektor, pro který platí $2\mathbf{AB} - \mathbf{CD}$ a zapište jej také pomocí matice typu 2x2.

**Cvičení 2.8**

Stopa matice $A$, kterou označujeme $TrA$, je definována jako součet prvků na hlavní diagonále čvercové matice $A$. Pro čtvercovou matici $A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ tedy platí $TrA = x + v$.

Na maticích $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ukažte, že platí:

a) $Tr3A = 3TrA$

b) $Tr(A + B) = TrA + TrB$

c) $Tr(A - 3B) = TrA - 3TrB$

**ŘEŠENÍ 1**

**Cvičení 1.1**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -\pi \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 4 & 2+a \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2x+2 & 5 \\ x & 0 \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.2**

a) $A + B = B + A = \begin{pmatrix} x+2 & 2+x \\ 2 & -x \end{pmatrix}$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} x+4 & 2+4x \\ 1 & -x \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.3**

a) $X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Cvičení 1.4**

a) $x = 1$

b) $x = \sqrt{2}$

**Cvičení 1.5**

a) $a = -3; b = 2; c = 3; d = 5$

b) $a = 2; b = 2; c = 2; d = 3$

**Cvičení 1.6**

a) AHOJ

b) DNES

**Cvičení 1.7**

Návod: Komentujte dle znázornění v soustavě souřadnic.

## ŘEŠENÍ 2

**Cvičení 2.1**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 0 & 3\pi \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Cvičení 2.2**

a) $k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

b) $k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k \cdot E$

**Cvičení 2.3**

a) $\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ \frac{1}{1000} & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

**Cvičení 2.4**

a) x=2

b) x=1

**Cvičení 2.5**

Důkaz je zřejmý, neboť sčítání je komutativní.

**Cvičení 2.6**

a) $a = 2; b = 4$

b) $a = 1; b = 7; c = -5; d = -4$

**Cvičení 2.7**

Návod: Komentujte dle znázornění v soustavě souřadnic.

**Cvičení 2.8**

a) $Tr3A = 3TrA = -9$

b) $Tr(A + B) = TrA + TrB = -2$

c) $Tr(A - 3B) = TrA - 3TrB = -6$

**Doporučená a použitá literatura:**

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.