Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Součin matic typu (2,2)
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_02
Pořadí DUMu v sadě	2
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	4. února 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a větší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o součin matic typu (2,2). **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat větší množství původních příkladů a netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

SOUČIN DVOU MATIC

Jsou-li dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

pak jejich součinem je matice C, pro kterou platí

$$C = \begin{pmatrix} au + bx & av + by \\ cu + dx & cv + dy \end{pmatrix}$$

Součin matic A, B zapisujeme ve tvaru $A \cdot B = C$.

Úloha 2

Určete součin matic A, B je-li dáno

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Podobně jako u sčítání matic, budeme hledat analogie mezi násobením matic a násobením reálných čísel. Víme, že součin reálných čísel je reálné číslo. Na základě definice násobení matic můžeme říci, že součin dvou matic je matice. Množina všech matic typu $(2, 2)$ je uzavřena vzhledem k operaci násobení matic. Operace násobení reálných čísel je asociativní, totéž platí pro násobení matic.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Asociativnost násobení matic si ověříme na následující úloze.

Úloha 3

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte $A \cdot (B \cdot C), (A \cdot B) \cdot C$.

Řešení:

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Ukázali jsme, že platí $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Úloha 4
Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte $A \cdot B, B \cdot A$.
Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že na rozdíl od sčítání matic není násobení matic v obecné případě komutativní

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Neutrálním prvkem při násobení reálných čísel je číslo 1, zřejmě platí $a \cdot 1 = a$. Pokusme se nyní zjistit, zda existuje matice X, pro kterou platí $A \cdot X = A$. Nechť jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

Má-li být matice X neutrálním prvkem při násobení matic, musí platit $A \cdot X = A$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matic dostáváme

$$\begin{pmatrix} u + 2x & v + 2y \\ 3u + 4x & 3v + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Porovnáním prvků matic na levé a pravé straně dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} u + 2x &= 1 \\ v + 2y &= 2 \\ 3u + 4x &= 3 \\ 3v + 4y &= 4 \end{aligned}$$

,
z které plyne $u = 1, v = 0, x = 0, y = 1$. Pro matici X pak platí

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici nazýváme jednotkovou maticí a značíme ji I. Pro libovolnou matici A a matici I platí

$$A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Připomeňme si nyní, že ke každému reálnému číslu $a \neq 0$ existuje číslo převrácené $\frac{1}{a}$, pro které platí $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Nyní se pokusíme zjistit, zda existuje matice X, pro kterou platí $A \cdot X = I$.

Matice A, X si vyjádříme ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

a budeme řešit rovnici $A \cdot X = I$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matic dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} au + bx &= 1 \\ av + by &= 0 \\ cu + dx &= 0 \\ cv + dy &= 1 \end{aligned}$$

Pro neznámé u, v, x, y platí

$$u = \frac{d}{ad - bc} \quad v = -\frac{b}{ad - bc} \quad x = -\frac{c}{ad - bc} \quad y = \frac{a}{ad - bc}$$

Řešení soustavy existuje za podmínky

$$ad - bc \neq 0$$

Pro matici X pak dostáváme

$$X = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matici X nazýváme inverzní maticí k matici A a značíme ji A^{-1}. Platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

CVIČENÍ 3

Cvičení 3.1

Vynásobte, je-li to možné. O je nulová a E jednotková matice.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $O \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $E \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $E \cdot O$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 50 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & \sin \pi \\ \cos \frac{\pi}{4} & \cos \pi \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \pi & \sin \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{3}{2}\pi & \cos \frac{3}{2}\pi \\ \cos 2\pi & \sin 2\pi \end{pmatrix}$

Cvičení 3.2

Na maticích $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ doložte, že násobení matic není komutativní, tj. že **neplatí** $A \cdot B = B \cdot A$.

Cvičení 3.3

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ověřte, zda platí $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) Ověřte, zda platí $(A + B)^2 = A^2 + 2BA + B^2$.

c) Ověřte, zda platí $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Cvičení 3.4

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

a) $A^2 - B$

b) $(A + B)^2$

c) $A \cdot C - C \cdot A$

d) $A^2 - B^2$

e) $(A + B + C)^2$

f) $(A - B) \cdot (A - C)$

Cvičení 3.5

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Přesvědčte se, že platí:

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

c) $5(A \cdot B) = A \cdot (5 \cdot B)$

Cvičení 3.6
Doplňte reálné číslo x tak, aby platila uvedená rovnost:

a) $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ -3 & -2x \end{pmatrix}$

Cvičení 3.7
Doplňte reálná čísla a, b, c, d tak, aby platila uvedená rovnost:

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a-1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.8
Uvažujme, že matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je specifický zápis dvojice vektorů (se souřadnicemi ve sloupcích) (1,0) a (0,1). Uvedené vektory určují tzv. jednotkový čtverec. Načrtněte a diskutujte, jak se dvojice vektorů (jednotkový čtverec) změní po znásobení matice A tzv. transformační maticí T:

a) $T = E$

b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

h) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

ch) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

k) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.9

Uvažujme opět jednotkový čtverec a transformace popsané ve Cvičení 3.8. Ukažte, že obsah útvaru, který vznikne transformací jednotkového čtverce (znásobení matice určující jednotkový čtverec A tzv. transformační maticí T) je $(ad - bc)$krát větší než obsah jednotkového čtverce, kde a, b, c, d jsou prvky transformační matice $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Poznámka: Rozdíl $(ad - bc)$ se nazývá **determinant** čtvercové matice a dozvíte se o něm více dále v textu.

Cvičení 3.10

Nechť matice $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ určuje dvojici vektorů (-5,0) a (-3,1), které vymezují trojúhelník M. Dále nechť $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je transformační matice.

a) Proveďte transformaci trojúhelníku M pomocí transformace dvojice vektorů (vizte Cvičení 3.8) součinem matic $A \cdot T$.

b) Zakreslete do soustavy souřadnic Oxy trojúhelník M i transformovaný trojúhelník M'.

c) Ověřte, že obsah trojúhelníku M' je $(ad - bc)$ krát větší než obsah trojúhelníku M před transformací (a, b, c, d jsou prvky matice T).

Cvičení 3.11

Pomocí násobení matic lze vytvořit jednoduchou (i když poměrně robustní) šifrovací metodu:

a) Šifrované slovo převedeme na číselný kód (uvažujeme např. jednoduché přiřazení čísel k písmenům $A \sim 1; B \sim 2; ...; CH \sim 9; ....$

b) Číselný kód zapíšeme do matice (matic) (dle dohody vodorovně či svisle).

c) Matici (matice) znásobíme smluvenou šifrovací maticí S.

d) Zakódovanou matici (matice) předáme příjemci.

e) Příjemce šifry matici (matice) znásobí dekódovací maticí D a získané číselné hodnoty převede do české abecedy.

Příklad:

Šifrovací matice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Dekódovací matice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Zašifrování slova:

$$\begin{pmatrix} A & H \\ O & J \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 11 \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 38 & -11 \end{pmatrix}$$

Dešifrování slova:

$$\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 38 & -11 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & H \\ O & J \end{pmatrix}$$

Pomocí uvedené šifrovací matice S zašifrujte slova DNES a STOP a po zašifrování je dekódujte pomocí dekódovací matice D.
Poznámka: Všimněte si součinu $S \cdot D$ a vypočtěte jej.

ŘEŠENÍ 3

Cvičení 3.1

a) $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 \\ 2\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.2

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.3

a) Neplatí

b) Neplatí

c) Platí

Cvičení 3.4

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 18 & 20 \\ 10 & 38 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.5

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $5(A \cdot B) = A \cdot (5 \cdot B) = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Cvičení 3.6

a) $x = -\frac{5}{2}$

b) Nemá řešení.

Cvičení 3.7

a) $a = 9, b = 1$

b) $a = 1, b = 2, c = 4, d = 4$

Cvičení 3.8

Návod: Komentujte dle znázornění v soustavě souřadnic.

Cvičení 3.11

a) DNES: $\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -15 \\ 45 & -20 \end{pmatrix}$

b) STOP: $\begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 & -21 \\ 50 & -17 \end{pmatrix}$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.