evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Součin matic typu (3,3)
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_05
Pořadí DUMu v sadě	5
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	7. února 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a větší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o součin matic typu (3,3). **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat větší množství původních příkladů a netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

SOUČIN DVOU MATIC

Jsou-li dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

pak jejich součinem je matice C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

kde pro každý prvek matice C platí

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}$$

Např.: $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

Součin matic A, B zapisujeme ve tvaru $A \cdot B = C$.

Úloha 2

Jsou dány matice A, B. Určete součin matic $A \cdot B, B \cdot A$, je-li dáno

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 29 & -56 & 27 \\ 17 & -36 & 19 \\ 14 & -25 & 11 \end{pmatrix}$$

Násobení matic není komutativní

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Vlastnosti operacenásobení matic typu $(3, 3)$ jsou analogické vlastnostem, které byly vyloženy u násobení matic typu $(2, 2)$.

$A \cdot B = C$

součin matic je matice

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
násobení matic je asociativní

$A \cdot I = A$
neutrálním prvkem operace násobení je jednotková matice matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$
inverzním prvkem operace násobení je matice inverzní

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

kde D je determinant matice A a D_{ik} je doplněk determinantu D příslušný k prvku a_{ik}.

Pojem inverzní matice k matici typu $(3, 3)$ je v tuto chvíli poněkud komplikovaný. Abychom mohli určit k dané matici typu $(3, 3)$ matici inverzní, potřebuje znát pojem determinantu matice, pojem regulární matice a pojem doplňku determinantu D_{ik} příslušnému prvku a_ik.

Úloha 3
Jsou dány matice A, X. Ověřte, že platí $A \cdot X = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CVIČENÍ 6

Cvičení 6.1
Vynásobte matice, je-li to možné:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, kde 0 je nulová matice (3,3)

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot 0$, kde 0 je nulová matice (3,3)

g) $E \cdot 0$, kde 0 je nulová a E je jednotková matice (3,3)

h) $\begin{pmatrix} \sin\pi & \cos\pi & \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi & \cos\frac{3\pi}{2} \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi & \cos\frac{5\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi & \sin\frac{\pi}{2} \\ \cos 2\pi & \sin 2\pi & \sin\frac{3\pi}{2} \\ \cos 3\pi & \sin 3\pi & \sin\frac{5\pi}{2} \end{pmatrix}$

Cvičení 6.2

Na maticích A a B doložte, že násobení matic není komutativní, tj., že neplatí $A \cdot B = B \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.3

Jsou dány matice A, B a C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte, je-li to možné:

a) A^2
b) B^2
c) A^3
d) $(A+B)\cdot(A+C)$
e) $A\cdot B + B\cdot A$
f) $(A+B+C)^2$

Cvičení 6.4
Jsou dány matice A, X. Ověřte, že platí $A\cdot X = E$, kde E je jednotková matice typu (3,3):

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.5
Jsou dány matice A, B a C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že platí:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C.$$

Cvičení 6.6
Na maticích A a B ukažte, že stopa matice, která je definována jako součet prvků na hlavní diagonále čtvercové matice (pro matici A ozn. $Tr(A)$), má tzv. vlastnost cykličnosti, tj. že platí:

$$Tr(A\cdot B) = Tr(B\cdot A).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6.7

Násobení modulo n ($n \in N$) je pro $a, b \in N$ definováno jako zbytek po dělení součinu $a \cdot b$ číslem n. Takový součin označujeme $a \odot b \equiv c \pmod{n}$. Příkladem uveďme $5 \odot 8 \equiv 1 \pmod{3}$. Vynásobit matice $A \odot B$ modulo n ($n \in N$) znamená, že matice vynásobíme dle definice a místo výsledků zapíšeme zbytky po dělení číslem n, jak je vidět na následujícím příkladu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Vynásobte matice modulo n, kde n nabývá postupně hodnot $n = 2, 3, 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.8

Jsou dány matice A a B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Na maticích A a B doložte, že platí tzv. transpozice součinu, tj. že platí:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

kde A^T a B^T jsou transponované matice.

Cvičení 6.9

Určete následující součin, jestliže ani jedno $a_{ii} \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6.10

Ukažte, že pro $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ platí:

$$(X - 5 \cdot E) \cdot (X + 3 \cdot E) = X^2 - 2 \cdot X - 15 \cdot E,$$

přičemž E je jednotková matice typu (3,3).

Cvičení 6.11

Ukažte, že pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 12 \\ 6 & 1 & 16 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ platí:

a) $3 \cdot A + 2 \cdot A - 4 \cdot E = B$,

b) $(A + 5 \cdot E)^2 = A^2 + 10 \cdot A + 25 \cdot E$,

přičemž E je jednotková matice typu (3,3).

ŘEŠENÍ 6

Cvičení 6.1

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cvičení 6.2

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Cvičení 6.3

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 9 \\ 11 & 16 & 17 \end{pmatrix}$

Cvičení 6.4

a) platí b) platí

Cvičení 6.5

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 14 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.6

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$Tr(A \cdot B) = 11$

$Tr(B \cdot A) = 11$

Cvičení 6.7

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} mod 2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} mod 3$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} mod 4$

Cvičení 6.8

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.10

Uvedený vztah platí.

Cvičení 6.11

a) Uvedený vztah platí.

b) Uvedený vztah platí.

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.