Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Základní operace s maticemi typu (m,n)
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_07
Pořadí DUMu v sadě	7
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	1. března 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o sčítání, odčítání a násobení matic typu (m,n) a násobek matice (m,n) reálným číslem. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

MATICE TYPU $(m,\ n)$

Maticí typu $(m,\ n)$ rozumíme obdélníové schéma čísel o mřádcích a $n$sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

V případě, že $m = n$, hovoříme o čtvercové matici $n-$ tého stupně. Matice typu $(2, 2)$ a $(3, 3)$ jsou tedy čtvercové matice druhého a třetího stupně.

Matici typu $(1, n)$, $A = (a_{11}, a_{12} \cdots a_{1n})$ nazýváme řádkem nebo řádkovou maticí. Matici typu $(m, 1)$ nazýváme sloupcem nebo sloupcovou maticí.

Operace s maticemi typu (m, n) vykazují některé odlišnosti proti operacím se čtvercovými maticemi.

1. Rovnost matic
   Matice A, B pokládáme za sobě rovné, jsou-li stejného typu (m, n) a je-li každý prvek a_{ij} matice A roven stejnolehlému prvku b_{ij} matice B.

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

2. Součet matic
   Součtem matic A, B stejného typu (m, n) nazýváme matici C typu (m, n), jejíž každý prvek c_{ij} je roven součtu stejnolehlých prvků a_{ij}, b_{ij} matic A, B.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

3. Násobení matice číslem
   Maticí kA, kde $k \in R$ rozumíme matici B, jejíž každý prvek b_{ij} je roven $k-$násobku stejnolehlého prvku a_{ij} matice A. Píšeme $B = kA$.

$$b_{ij} = ka_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

3. Součin matic
   Součin matic lze uskutečnit v případě, kdy první matice má stejný počet sloupců jako druhá maice řádků. Je-li matice A typu (m, n) a matice B typu (n, p), pak součinem matic AB v tomto pořadí nazýváme matici C typu (m, p), pro jejíž každý prvek c_{ik} platí

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad k = 1, 2, \cdots p$$

Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n), pak matice $A^T = (a^T_{ij})$ typu (n, m) taková, že pro každé místo (i, j) platí $a^T_{ij} = a_{ji}$, se nazývá matice transponovaná k matici A.

Pro každou matici A platí

$$(A^T)^T = A$$

Pro každé dvě matice A, B téhož typu je

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Pro každé $\alpha \in R$ a každou matici A je

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

Pro každé dvě matice A, B typů $(m, n), (n, s)$ platí

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Úloha 4

Jsou dány matice A, B. Určete součin AB.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Matice A je typu $(2, 3)$ a matice B je typu $(3, 4)$. Matice $C = AB$ je typu $(2, 4.)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 = 0 \\
c_{12} &= 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 11 = 81 \\
c_{13} &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 39 \\
c_{14} &= 2 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) = 5 \\
c_{21} &= (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 3 \\
c_{22} &= (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 11 = 42 \\
c_{23} &= (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 3 \\
c_{24} &= (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -15
\end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 3 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

CVIČENÍ 7

Cvičení 7.1
Sečtěte/odečtěte, je-li to možné.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 3\pi & -\pi \\ \pi & 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -\pi & 3\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} \sin\pi & 1 \\ \cos\pi & 0 \\ \operatorname{tg}\pi & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & x \\ 3 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ 3 & 4 \\ 5 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} \log_3 243 & \log_5 625 \\ \log_4 4096 & log_6 36 \\ \log_2 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log_2 16 & \log_4 16 \\ \log_{16} 16 & \log_{256} 16 \\ \log_2 4096 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} x & 2x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -2x & 0 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} \sin\pi & \sin 2\pi \\ \sin 15\pi & \sin 16\pi \\ \sin -7\pi & \sin -9\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\pi & \cos 2\pi \\ \cos 15\pi & \cos 16\pi \\ \cos -7\pi & \cos -9\pi \end{pmatrix}$

Cvičení 7.2
Na maticích A, B, C doložte asociativnost sčítání matic stejného typu:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

ŘEŠENÍ 7

Cvičení 7.1

a) $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) nelze sečíst

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2\pi & 2\pi \\ 2\pi & 2\pi \\ 2\pi & 2\pi \end{pmatrix}$

f) nelze sečíst

g) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 5+x \\ 6+x \\ 3+x \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1+x & 3+x \\ 3+x & 4+x \\ 9 & 3x \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 2,5 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} x & -x & 1 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Cvičení 7.2

$A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.