INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Hodnost matice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_09
Pořadí DUMu v sadě	9
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	5. března 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a větší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o hodnost matice. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž větší množství původních příkladů vztahujících se k výpočtu hodnosti matic.

HODNOST MATICE

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvky $i-$ tého řádku dané matice lze pokládat za souřadnice $n-$ rozměrného vektoru $\vec{a}_i$

$$\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$$

V tomto smyslu můžeme hovořit o lineární kombinaci řádků dané matice, resp.o jejich lineární závislosti a budeme tím rozumět lineární kombinaci, resp. lineární závislost příslušných vektorů.

Matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

odpovídají vektory

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 2)$$
$$\vec{a}_2 = (3, 2, 0)$$
$$\vec{a}_3 = (7, 4, 2)$$

Snadno nahédneme, že platí

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$$

To znamená, že vektor $\vec{a}_3$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, resp. vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ jsou lineárně závislé.

Největší počet lineárně nezávislých řádků matice nazýváme *hodností* matice. Hodnost matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, položíme rovnu 0. Hodnost matice budeme značit písmenem h.

Ve výše uvedené matici A platí, že vektory $\vec{a}_1 = (1, 0, 2), \vec{a}_2 = (3, 2, 0)$ jsou lineárně nezávislé, tedy matice A má aspoň dva nezávislé řádky, a tedy má hodnost rovnou aspoň dvěma, $h \geq 2$. Zároveň ale nemůže být $h = 3$, protože všechny tři vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ jsou lineárně závislé.

Má-li matice hodnost h, pak v ní existuje h lineárně nezávislých řádků a všechny ostatní jsou jejich lineárními kombinacemi.

Mějme matici A a utvořme matici B tak, že každý její řádek je lineární kombinací řádků matice A. Pak hodnost matice B je nejvýše rovna hodnosti matice A.

O dvou maticích A, B, které mají stejný počet sloupců, řekneme, že jsou *ekvivalentní,* mají-li stejnou hodnost. Ekvivalenci matic zapisujeme ve tvaru $A \sim B$.

Mějme matici A a vytvořme z ní novou matici B některou z těchto úprav:

a) napíšeme řádky matice A v jiném pořadí,
b) napíšeme sloupce matice A v jiném pořadí,
c) vynásobíme některý řádek matice A číselmem $k \neq 0$,
d) přidáme k matici A řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků,
e) vyjmeme z matice A řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků,
f) přičteme k některému řádku matice A lineární kombinaci ostatních řádků.

Pak matice A a B jsou ekvivalentní, $A \sim B$.

Významnou úlohu při určování hodnosti matice má *matice trojúhelníkového tvaru.* Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1h} & \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2h} & \cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}\cdots & a_{3h} & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0\cdots & a_{hh} & \cdots a_{hn} \end{pmatrix}$$

Prvkům $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{hh}$ říkáme *diagonální prvky matice.*Tyto prvky tvoří tzv. *hlavní diagonálu matice.* O matici, kde všechny diagonální prvky jsou různé od nuly a pod hlavní diagonálou jsou samé nuly, které tvoří "trojúhelník" říkáme, že má *trojúhelníkový tvar.*Je-li $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{hh} \neq 0$ má matice A hodnost h. Podaří-li se nám převést jistou matici X na matici ekvivalentní s maticí trojúhelníkového tvaru, budeme mít dokázáno, že daná matice má hodnost h. Převedení matice na trojúhleníkový tvar představuje tak jednu z možností, jak určit hodnost matice.

CVIČENÍ 8

Cvičení 8.1

Určete hodnost matic:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 32 & 24 & 16 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -20 & -15 & 10 \\ 52 & 39 & 26 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 12 & -24 & 36 & -48 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 9 & -27 & 36 & 18 \\ 2 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 12 & -16 & 8 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 8 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 12 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Cvičení 8.2

Jaká je hodnost matice A v závislosti na parametru p?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 17 \\ p & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

Cvičení 8.3

Ukažte na matici A a reálném čísle $k \in \Re \setminus \{0\}$, že platí

$$h(A) = h(k \cdot A)$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a $k = 3$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a $k = -1$

Cvičení 8.4
Následující matice převeďte na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 25 & 10 \\ 10 & 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 12 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & -6 \\ 10 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & -1 & 6 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 8 & -12 & 16 \\ 12 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Cvičení 8.5
Následující matici převeďte na trojúhelníkový tvar a určete její hodnost:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ŘEŠENÍ 8

Cvičení 8.1

a) 1	d) 2	g) 2	i) 1
b) 2	e) 1	h) 4	j) 4
c) 1	f) 1	ch) 2	k) 4

Cvičení 8.2

a) pro $q = -11$ je $h(A) = 2$; pro $q \neq -11$ je $h(A) = 3$

b) pro $q = -2$ je $h(A) = 2$; pro $q \neq -2$ je $h(A) = 3$

c) pro $q = \frac{8}{3}$ je $h(A) = 3$; pro $q \neq \frac{8}{3}$ je $h(A) = 4$

Cvičení 8.3

Uvedené vztahy jsou zřejmé.

Cvičení 8.4

a) např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) např. $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

b) např. $\begin{pmatrix} 12 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2\frac{1}{6} & 4\frac{1}{6} & -8\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

e) např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & -99 \end{pmatrix}$

c) např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & -61\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

f) např. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}$

Cvičení 8.5

$$\text{např.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5\frac{1}{2} & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\frac{7}{11} & -4\frac{10}{11} & -10\frac{8}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{9}{10} & 13\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22\frac{9}{29} \end{pmatrix}$$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.