evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Inverzní matice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_10
Pořadí DUMu v sadě	10
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	6. března 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a větší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o inverzní matici a její určení. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž větší množství původních příkladů vztahujících se k výpočtu inverzní matice.

INVERZNÍ MATICE

V předcházejících kapitolách jsme se seznámili s inverzní maticí. Nyní si ukážeme způsob, jak lze k dané matici určit matici inverzní, pokud existuje. Princip metody vysvětlíme na řešení rovnice

$$AX = B$$

kde A, B jsou dané matice a X je matice, kterou máme určit. Pokud k matici A existuje matice inverzní A^{-1}, pak touto maticí vynásobíme obě strany rovnice a dostaneme

$$A^{-1}AX = BA^{-1}$$

Dále vzhledem k $A^{-1}A = I$ můžeme psát

$$IX = BA^{-1}$$

tedy

$$X = BA^{-1}$$

Pricip naší metody spočívá v úpravě matice A, kterou se budeme snažit převést ekvivalentními úpravami na matici I. Současně stejné úpravy budeme provádět s maticí B.

Úloha 5

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte matici X, pro kterou platí $AX = B$.

Řešení:

1. řádek matice A vynásobíme -2, přičteme k 2. řádku a stejnou úpravu provedeme s maticí B

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. řádek matice A vydělíme 6 a stejnou úpravu provedeme s maticí B

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. řádek matice A vynásobíme -3, přičteme k 1. řádku a stejnou úpravu provedeme s maticí B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Úloha je vyřešena, pro matici X platí $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Snad je jasné, že princip metody spočívá v převedení matice na její trojúhelníkový tvar.

Úloha 6
K matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

najděte matici inverzní.

Řešení:

označíme-li hledanou matici X, pak musí platit $AX = I$, kde I je jednotková matice pod dosazení dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. řádek matice A vynásobíme -2 a přičteme k 3. řádku a stejnou úpravu provedeme s maticí I

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. řádek matice A vynásobíme 2 a přičteme k němu 2. řádek, stejnou úpravu provedeme s maticí I

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. řádek matice A vynásobíme -1 a přičteme ho k 2. a 1. řádku, stejnou úpravu provedeme s maticí I

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. řádek matice A vydělíme 2 a odečteme ho od 1. řádku, stejnou úpravu provedeme s maticí I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pro matici X platí

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

o správnosti výsledku se přesvědčíme zkouškou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CVIČENÍ 9

Cvičení 9.1
Určete inverzní matici A^{-1} k matici A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$

Cvičení 9.2
Určete inverzní matici A^{-1} k matici A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ŘEŠENÍ 9

Cvičení 9.1

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 7 \\ \frac{1}{2} & -6 \end{pmatrix}$

h) $A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 9.2

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3\frac{2}{3} & 2\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

g) matice A^{-1} neexistuje

h) matice A^{-1} neexistuje

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.