evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Determinanty 2. stupně
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_12
Pořadí DUMu v sadě	12
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	8. března 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů vztahujících se k determinantům 2. stupně a jejich výpočtu. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž větší množství původních příkladů vztahujících se k výpočtu determinantu matice typu (2,2).

DETERMINANTY

Determinanty 2. stupně

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinantem matice A druhého stupně nazýváme číslo

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Podobně jako u matic hovoříme o řádcích a sloupcích determinantu. Vedle symbolu $|A|$ se k označení determinantu používá také symbol $\det A$.

Úloha 1

Vypočtěte determinant matice A, je-li $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Řešení:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Připomeňme si, že k matici A existuje matice transponovaná A^T. Je-li matice A čtvercová, vznikne z ní transponovaná matice A^T "překlopením" podle hlavní diagonály. Je-li tedy

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ pak } A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Snadno se můžete přesvědčit, že determinant transponované matice A^T je roven determinantu původní matice A. Píšeme

$$|A| = \left|A^T\right|$$

Z determinantu $|A|$ vytvořme determinant $|B|$, který dostaneme z determinantu $|A|$ tak, že v něm zaměníme sloupce. Je-li tedy

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ pak } |B| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

Zřejmě platí

$$|B| = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -|A|$$

Vyměníme-li v determinantu dva sloupce, změní determinant znaménko. Totéž platí v případě, že vyměníme dva řádky.

Determinant $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ má řádky a sloupce stejné. Zřejmě platí $|C| = 0$.

V determinantu $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ vynásobme první řádek (tj. každý prvek tohoto řádku) determinantu číslem k. Dostáváme tak determinant $|A'|$, pro který platí

$$|A'| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|.$$

Násobíme-li některý řádek nebo sloupec determinantu $|A|$ číslem k, dostaneme determinant $|A'|$, pro který platí $|A'| = k|A|$.

V determinantu $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$ je druhý řádek dvojnásobkem prvního řádku. Zřejmě platí $|D| = 0$.

Je-li některý řádek (sloupec) determinantu $|A|$ násobkem jiného řádku (sloupce), je determinant roven nule.

V determinantu $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ přičteme k 2. řádku dvojnásobek 1. řádku. Dostaneme tak determinant $|F|$, pro který platí $|F| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$. Snadno se přesvědčíme, že hodnota determinantu $|F|$ je stejná jako hodnota determinantu $|E|$.

Přičteme-li k některému řádku (sloupci) determinantu násobek jiného řádku (sloupce), hodnota determinantu se nezmění.

CVIČENÍ 10

Cvičení 10.1
Vypočtěte determinant matice $|A|$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$

Cvičení 10.2

Vypočítejte determinant matice A a porovnejte ho s determinantem matice transponované A^T:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

Cvičení 10.3

Vypočítejte determinant matice A a porovnejte ho s determinantem matice, která vznikne z matice A přehozením řádků (matice B):

a) $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

Cvičení 10.4

Vypočítejte determinant matice A a porovnejte ho s determinantem matice, která vznikne z matice A výměnou sloupců (matice B):

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Cvičení 10.5

Ověřte platnost tvrzení, že pokud znásobíme jeden řádek matice A číslem $k \in \Re$ dostaneme matici B, pro kterou bude platit: $|B| = k|A|$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, a $k = \pi$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, a $k = e$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, a $k = -3$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, a $k = \cos \pi$

ŘEŠENÍ 10

Cvičení 10.1

a) $|A| = -2$

b) $|A| = 1$

c) $|A| = 1$

d) $|A| = 2$

e) $|A| = -2$

f) $|A| = 1$

g) $|A| = -2$

h) $|A| = 64$

ch) $|A| = 0$

Cvičení 10.2

a) $|A| = |A^T| = -2$

b) $|A| = |A^T| = 0$

c) $|A| = |A^T| = 0$

d) $|A| = |A^T| = 22$

Cvičení 10.3

a) $|A| = -|B| = 70$

b) $|A| = -|B| = 5$

c) $|A| = -|B| = 160$

d) $|A| = -|B| = 40$

Cvičení 10.4

a) $|A| = -|B| = -10$

b) $|A| = -|B| = 0$

c) $|A| = -|B| = 10$

d) $|A| = -|B| = -8$

Cvičení 10.5

a) $|A| = -2$ a $|B| = -2\pi$

b) $|A| = 4$ a $|B| = -12\pi$

c) $|A| = 5$ a $|B| = 5e$

d) $|A| = -2$ a $|B| = 2$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.