evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	DETERMINANTY 3. stupně
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_13
Pořadí DUMu v sadě	13
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	1. dubna 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o výpočty determinantů 3. stupně. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

DETERMINANTY 3. stupně

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Determinantem matice A třetího stupně nazýváme číslo

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33} tvoří tzv. *hlavní diagonálu determinantu,*prvky a_{13}, a_{22}, a_{13} tvoří tzv. *vedlejší diagonálu determinantu.*

Sarrusovo pravidlo
K výpočtu determinantu 3. stupně používáme jednoduché pravidlo (tzv. Sarrusovo pravidlo). Matici daného determinantu rozšíříme o dva sloupce, a to čtvrtý a pátý sloupec, které vytvoříme z jejího prvního a druhého sloupce:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & \searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}$$

nyní vytvoříme tři součiny "ve směru hlavní diagonály" (označené šipkami směřujícími ze shora šikmo dolů) a odečtme od nich tři součiny "ve směru vedlejší diagonály" (označené šipkami směřujícími ze zdola šikmo nahoru). Pro determinanty vyššího stupně pravidlo neplatí.

Úloha 2

Vypočtěte determinant matice A, je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right. = (4 + 8 + 18) - (24 + 6 + 6) = 30 - 36 = -6$$

Determinant transponované matice

Je-li dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ pak matici } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí transponovanou k matici A. Determinant transponované matice $\left|A^T\right|$ je roven determinantu $|A|$ původní matice A.

$$\left|A^T\right| = |A|$$

Výměna sloupců nebo řádků determinantu

Vyměníme-li v determinantu dva sloupce, změní determinant znaménko. Totéž platí v případě, že vyměníme dva řádky. Označíme-li původní determinant $|A|$ a determinant s vyměněnými sloupci nebo řádky $|A'|$, pak platí

$$|A'| = -|A|$$

Determinant, který má dva sloupce nebo dva řádky stejné, je roven nule. Vyměníme-li uvažované sloupce mezi sebou, dostaneme z původního determinantu $|A|$ nový determinant $|A'|$, pro který platí $|A'| = -|A|$. Protože jsou však oba sloupce stejné, je zřejmě $|A'| = |A|$. Odtud plyne $|A| = -|A|$, tj. $|A| = 0$.

Doplněk determinantu

Mějme čtvercovou matici *3*- stupně. Její determinant označme D. Vynecháme-li v dané matici i-tý řádek a k-tý sloupec, dostaneme čtvercovou matici *2*- stupně. Její determinant nazveme subdeterminantem *2*-stupně determinantu D, patřícím k prvku a_{ik} a označíme jej $|A_{ik}|$. Subdeterminant $|A_{ik}|$ násobený čísle $(-1)^{i+k}$ nazveme doplňkem daného determinantu, patřícímu k prvku a_{ik}, stručně doplňkem prvku a_{ik}, a označíme jej D_{ik}.

$$D_{ik} = (-1)^{i+k}|A_{ik}|$$

Mějme determinant třetího stupně

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Pro determinant D zřejmě platí

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Nahradíme-li výrazy v závorkách subdeterminanty, dostáváme

$$D = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11} = |A_{11}|$$
$$D_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12} = -|A_{12}|$$
$$D_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13} = |A_{13}|$$

Determinant *3*- stupně je roven součtu prvků libovolného i-tého řádku, násobených příslušnými doplňky

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}$$

Determinant *3*- stupně je roven součtu prvků libovolného k-tého sloupce, násobených příslušnými doplňky

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}D_{ik}$$

Úloha 3

Vypočtěte determinant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení:

protože ve druhém řádku je jedna nula, provedeme rozvoj determinantu podle prvků druhého řádku

$$D = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}D_{2j} = a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} + a_{23}D_{23} = 3D_{21} + 4D_{22}$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| = -|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-9) = 7$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = |A_{22}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$D = 3D_{21} + 4D_{22} = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-5) = 1$$

Násobení řádku nebo sloupce determinantu reálným číslem

Násobíme-li některý řádek nebo sloupec, tj. všechny prvka tohoto řádku nebo sloupce determinantu D číslem c, dostáváme determinant D', pro který platí

$$D' = cD$$

Je-li některý řádek (sloupec) determinantu D násobkem jináho řádku (sloupce), je determinant roven nule. Speciálně platí: Je-li některý řádek nebo sloupec determinantu nulový, je determinant roven nule.

Je-li některý řádek (sloupec) determinantu lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

Přičteme-li k některému řádku (sloupci) determinantu násobek jiného řádku (sloupce), hodnota determinantu se nezmění.

Přičteme-li k některému řádku (sloupci) determinantu lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců), hodnota determinantu se nezmění.

CVIČENÍ 11

Cvičení 11.1
Vypočtěte determinant matice $|A|$:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 10 & -10 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2\sin 2x & 4\cos^2 x & 6 \\ 2\sin^2 x & \sin 2x & x \\ \sin 3x - sinx & \cos 3x + \cos x & 2^x \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{pmatrix}$

Cvičení 11.2
Prozkoumejte determinanty matice $|A|$ a $|B|$, jestliže matice B vznikne z matice A znásobením druhého řádku konstantou k=5:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Cvičení 11.3

Zkoumejte determinant matice A a A^T, jestliže matice A je dána:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 11.4

Upravte a vyčíslete determinanty:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} m+x & m-x & x \\ n+x & 2n-x & x \\ x & -x & x \end{vmatrix}$

ŘEŠENÍ 11

Cvičení 11.1

a) $|A| = -240$

b) $|A| = 0$

c) $|A| = 0$

d) $|A| = -112$

e) $|A| = 1$

f) $|A| = 0$

g) $|A| = 0$

h) $|A| = -4a^3$

Cvičení 11.2

a) $|A| = -11$ $\quad |B| = 5 \cdot |A| = -55$

b) $|A| = -48$ $\quad |B| = 5 \cdot |A| = -240$

Cvičení 11.3

$|A| = |A^T| = -48$

Cvičení 11.4

a) $(a-b)(a-c)(b-c)$

b) $x \cdot m \cdot n$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.