evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	DETERMINANTY n -tého stupně, n > 3
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_14
Pořadí DUMu v sadě	14
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	2. dubna 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o výpočty determinantů vyšších stupňů prostřednictvím Laplaceova rozvoje. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

DETERMINANTY n-tého stupně, $n > 3$

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinantem čtvercové matice A n-tého stupně nazýváme číslo

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} |A_{k1}|$$

Tento vztah nazýváme rozvojem determinantu D matice A podle prvního sloupce matice A.

Subdeterminanty a algebraické doplňky

Vynecháme-li v dané matici i-tý řádek a k-tý sloupec, dostaneme čtvercovou matici $(n-1)$-ního stupně. Její determinant nazveme subdeterminantem $(n-1)$-ního stupně determinantu D, patřícím k prvku a_{ik} a označíme jej $|A_{ik}|$. Subdeterminant $|A_{ik}|$ násobený čísle $(-1)^{i+k}$ nazveme algebraickým doplňkem daného determinantu, patřícímu k prvku a_{ik}, stručně doplňkem prvku a_{ik}, a označíme jej D_{ik}.

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} |A_{ik}|$$

S využitím algebraických doplňků můžeme psáti

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} D_{k1}$$

Tento výsledek platí pro libovolný sloupec nebo řádek.

Determinant $n-$tého stupně je roven součtu prvků libovolného $i-$tého řádku, násobených příslušnými algebraickými doplňky

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$$

Determinant $n-$tého stupně je roven součtu prvků libovolného $k-$tého sloupce, násobených příslušnými algebraickými doplňky

$$D = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} D_{lk}$$

Je-li dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pak matici

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme matici transponovanou k matici A. Determinant transponované matice $D^T = \left|A^T\right|$ je roven determinantu $D = |A|$ původní matice A.

$$D^T = D$$

Výměna sloupců nebo řádků determinantu

Vyměníme-li v determinantu dva sloupce, změní determinant znaménko. Totéž platí v případě, že vyměníme dva řádky. Označíme-li původní determinant D a determinant s vyměněnými sloupci nebo řádky D', pak platí

$$D' = -D$$

Determinant, který má dva sloupce nebo dva řádky stejné, je roven nule. Vyměníme-li uvažované sloupce mezi sebou, dostaneme z původního determinantu D nový determinant D', pro který platí $D' = -D$. Protože jsou však oba sloupce stejné, je zřejmě $D' = D$. Odtud plyne $D = -D$, tj. $D = 0$.

Násobení řádku nebo sloupce determinantu reálným číslem

Násobíme-li některý řádek nebo sloupec, tj. všechny prvka tohoto řádku nebo sloupce determinantu D číslem c, dostáváme determinant D', pro který platí

$$D' = cD$$

Je-li některý řádek (sloupec) determinantu D násobkem jiného řádku (sloupce), je determinant roven nule. Speciálně platí: Je-li některý řádek nebo sloupec determinantu nulový, je determinant roven nule.

Je-li některý řádek (sloupec) determinantu lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

Přičteme-li k některému řádku (sloupci) determinantu násobek jiného řádku (sloupce), hodnota determinantu se nezmění.

Přičteme-li k některému řádku (sloupci) determinantu lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců), hodnota determinantu se nezmění.

Úloha 4

Vypočtěte determinant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Řešení:

protože ve třetím řádku jsou dvě nuly, provedeme rozvoj determinantu podle prvků třetího řádku

$$D = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}D_{3j} = a_{31}D_{31} + a_{32}D_{32} + a_{33}D_{33} + a_{34}D_{34} = 2D_{31} + 3D_{32}$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = |A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 6 = 5$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}|A_{22}| = -|A_{22}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 7) = 3$$

$$D = 2D_{31} + 3D_{22} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$$

CVIČENÍ 12

Cvičení 12.1

Vypočtěte determinant matice $|A|$:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Cvičení 12.2

Laplaceovým rozvojem vypočítejte determinant 3. řádu a výsledek ověřte Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Cvičení 12.3
Dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & z & -1 \\ y & z & 0 & 1 \\ z & y & x & 1 \end{vmatrix} = (x-y+z)(x+y-z)$$

Cvičení 12.4
Ověřte, že jestliže matice B vznikne z atice A znásobením 2. sloupce číslem -2, bude platit $detB = -2detA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ŘEŠENÍ 12

Cvičení 12.1

a) $|A| = -972$

b) $|A| = 8100$

c) $|A| = -40$

d) $|A| = 16$

Cvičení 12.2

Uvedená rovnost platí (využijte Sarrusovo pravidlo a algebraické úpravy).

Cvičení 12.3

$|A| = |0$

Cvičení 12.4

Uvedená rovnost platí.

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.