Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_16
Pořadí DUMu v sadě	16
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	4. dubna 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a několik řešených příkladů z oblasti řešení soustav lineárních rovnic s využitím maticového počtu. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž méně obvyklý způsob výkladu uvedené kapitoly.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Uvažujme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} x + \quad y + z \quad &= 6 \\ 2x - \quad y + z \quad &= 3 \\ x + \; 2y - z \quad &= 2 \end{aligned}$$

Užitím maticového počtu můžeme přepsat soustavu následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nebo ještě stručněji

$$AX = B$$

Pokud se budeme dívat na matice X, B jako na vektory, pak lze psáti

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Matici

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých, nazýváme *maticí soustavy.*

Matici

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

která vznikne z matice A_s připojením sloupce pravých stran, nazýváme *rozšířenou maticí soustavy.*

Řešením naší soustavy je uspořádaná trojice čísel (k_1, k_2, k_3), můžeme také říci každý vektor $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ takový, že když čísla k_1, k_2, k_3 dosadíme za neznámé x, y, z do levých stran rovnic soustavy , jsou všechny tyto rovnice současně splněny. Řešit soustavu znamená najít všechna její řešení. Pro řešeí soustavy je důležitý pojem ekvivalence dvou soustav.

Dvě soustavy rovnic o stejném počtu neznámých nazýváme ekvivalentními, jestliže každé řešení první soustavy je zároveň řešením druhé soustavy, a naopak, každé řešení druhé soustavy je řešením první soustavy. Ekvivalentní soustavu k dané soustavě získáme ekvivalentními úpravami.

Ekvivalentní úpravy jsou základem tzv. *Gaussovy eliminační metody,* která spočívá v tom, že danou soustavu převedeme úpravami, zcela analogickými úpravám matice na trojúhelníkový tvar, na ekvivalentní soustavu, jejíž vyřešení je snadné. V případě naší soustavy postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} x + \quad y + z &= 6 \\ 2x - \quad y + z &= 3 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= \quad 6 \\ -3y - \quad z &= -9 \\ y - 2z &= \quad 4 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= \quad 6 \\ -3y - \quad z &= -9 \\ -7z &= -21 \end{aligned}$$

Soustava je prakticky vyřešena. Z poslední rovnice plyne $z = 3$. Po dosazení do druhé rovnice dostáváme $y = 2$ a po dosazení do první rovnice je $x = 1$.

Pokud bychom použili maticového zápisu, dostali bychom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

V úvodu této kapitoly jsme zmínili matici soustavy a rozšířenou matici soustavy. Nyní je na místě otázka, zda je vždy možné danou soustavu převést na trojúhelníkový tvar jako v případě naší soustavy. Odpověď na tuto otázku souvisí s hodností matice soustavy a hodností rozšířené matice soustavy. V našem případě platí $h(A_s) = h(A_r) = 3$ a soustava má právě jedno řešení.

Uvažujme nyní soustavu n-lineárních rovnic o n neznámých.

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

Čísla a_{ik} se nazývají *koeficienty soustavy* , $x_1, x_2, \cdots, x_n$ jsou *neznámé*, čísla b_i tvoří *pravé strany* soustavy. Matici

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých nazýváme maticí soustavy.

Matici

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

která vznikne z matice A_s připojením sloupce ravých stran, nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Řešením soustavy je každá $n-$tice $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ čísel $k_1, k_2, \cdots, k_n$, která dané soustavě vyhovuje. To znamená, že po dosazení čísel $k_1, k_2, \cdots, k_n$ za neznámé $x_1, x_2, \cdots, x_n$ do všech rovnic soustavy jsou všechny tyto rovnice zároveň splněny. Soustavu n rovnic o n neznámých můžeme psát ve tvaru

$$AX = B$$

Je-li $B \neq O$, pak se soustava nazývá *nehomogenní*. Je-li $B = O$, pak se soustava nazývá *homogenní*.

Hodnost matice soustavy označme $h_s = h(A_s)$, hodnost rozšířené matice soustavy označme $h_r = h(A_r.)$ Podmínky řešitelnosti udává následujícíc věta.

Frobeniova věta

Soustava n lineárních rovnic o n neznámých má aspoň jedno řešení, pávě když hodnost h_s matice soustavy se rovná hodnosti h_r rozšířené matice soustavy.

$$h_s = h_r$$

Soustava n rovnic o n neznámých má jediné řešení, právě když hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy se rovná počtu neznámých, tj. právě když platí

$$h_s = h_r = n$$

V tomto případě lze $n - h_s$ neznámých volit libovolně.
Soustava n rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, právě když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy a je menší než počet n neznámých, tj. právě když platí

$$h_s = h_r < n$$

V tomto případě lze $n - h_s$ neznámých volit libovolně.

Věta o ekvivalenci soustav lineráních rovnic
Nechť S je soustava lineárních rovnic. Utvoříme-li z této soustavy soustavu S' následujícími úpravami:

1. napíšeme rovnice soustavy S v jiném pořadí,
2. násobíme některou z rovnic soustav S číslem $c \neq 0$,
3. přičteme k jedné z rovnic soustavy S libovolnou lineární kombinaci ostatních rovnic,
4. připojíme k soustavě S rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic,
5. vyjmeme ze soustavy S rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

Pak jsou soustavy S, S' ekvivalentní.

Gaussova eliminační metoda

Věty o ekvivalenci soustav lineráních rovnic lze s výhodou použít při řešení dané soustavy. Provádíme to nejčastěji tzv. *Gaussovou eliminační metodou,* která spočívá v tom, že danou soustavu převedeme úpravami, zcela analogickými úpravám matice na trojúhelníkový tvar, na ekvivalentní soustavu, jejíž vyřešení je snadné.

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.