INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Užití determinantů k řešení soustav lineárních rovnic
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_17
Pořadí DUMu v sadě	17
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	2. května 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o výpočty soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla. **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

UŽITÍ DETERMINANTŮ K ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRÍCH ROVNIC

Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Determinat

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

nazýváme determinant soustavy. Determinant, který vznikne z determinantu soustavy nahrazením prvního sloupce sloupcem pravých stran soustavy budeme značit

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Podobně determinant, který vznikne z determinantu soustavy nahrazením druhého sloupce sloupcem pravých stran soustavy budeme značit

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Ukážeme, že determinanty D_s, D_x, D_y určují řešení naší soustavy. Pro řešení soustavy zvolíme metodu sčítací. Abychom mohli provést eliminaci y, vynáso- bíme první rovnici koeficientem a_{22} a druhou rovnici koeficientem a_{12}.

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y &= b_2a_{12} \end{aligned}$$

Po odečtení druhé rovnice od první dostáváme

$$a_{11}a_{22}x - a_{21}a_{12}x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

odkud pro x plyne

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{D_x}{D_s}$$

Stejný postup zvolíme pro výpočet y. Abychom mohli provést eliminaci x, vynásobíme první rovnici koeficientem a_{21} a druhou rovnici koeficientem a_{11}.

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y &= b_1a_{21} \\ a_{21}a_{11}x + a_{22}a_{11}y &= b_2a_{11} \end{aligned}$$

Po odečtení druhé rovnice od první dostáváme

$$a_{12}a_{21}y - a_{22}a_{11}x = b_1a_{21} - b_2a_{11}$$

odkud pro y plyne

$$y = \frac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{D_y}{D_s}$$

Pokud bude $D_s \neq 0$ bude řešením naší soustavy uspořádaná dvojice

$$K = [x, y] = \left\{ \left[\frac{D_x}{D_s}, \frac{D_y}{D_s} \right] \right\}$$

Řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých si ukážeme ještě jednou na konkrétní úloze. Užitím determinantů řešte soustavu

$$\begin{aligned} 3x + y &= 9 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Pro jednotlivé determinanty platí

$$D_s = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 15$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice

$$K = \left\{ \left[\frac{D_x}{D_s}, \frac{D_y}{D_s} \right] \right\} = \left\{ \left[\frac{10}{5}, \frac{15}{5} \right] \right\} = \{[2, 3]\}$$

Uvažujme nyní soustavu $n-$lineárních rovnic o n neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Determinant

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme determinant soustavy. Determinant, který vznikne z determinantu soustavy nahrazením $i-$tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy budeme značit

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nyní jsme připraveni vyslovit tzv. Cramerovo pravidlo

CRAMEROVO PRAVIDLO

Nechť determinant soustavy n lineárních rovnic o n neznámých D_s je různý od nuly. Potom soustava n lineárních rovnic o n neznámých má právě jedno řešení $K = [k_1, k_2, \cdots k_n], i = 1, 2, \cdots n$, kde

$$k_i = \frac{D_{x_i}}{D_s}$$

Poznamenejme, že v případě kdy je determinant soustavy roven nule, nelze Cramerovo pravidlo použít. Nyní si ukážeme použití Cramerova pravidla v případě soustavy tří rovnic o třech neznámých.

$$\begin{gathered} 3x - 2y - z = -1 \\ x - y + 2z = -6 \\ 5x + 2y + 5z = 1 \end{gathered}$$

Pro determinant soustavy platí

$$D_s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -44$$

Pro determinant D_x platí

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -44$$

Pro determinant D_y platí

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -132$$

Pro determinant D_z platí

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 88$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice

$$K = \left\{ \left[\frac{D_x}{D_s}, \frac{D_y}{D_s}, \frac{D_z}{D_s} \right] \right\} = \left\{ \left[\frac{-44}{-44}, \frac{-132}{-44}, \frac{88}{-44} \right] \right\} = \{[1, 3, -2]\}$$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.