evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Užití determinantů a matic I
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_18
Pořadí DUMu v sadě	18
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	3. května 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o aplikaci determinantů v analytické geometrii (lineární nezávislost vektorů). **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž netradiční přístup k výkladu lineární algebry.

UŽITÍ DETERMINANTŮ A MATIC I

Vedle užití determinantů a matic při řešení soustav lineárních rovnic o n neznámých mají determinanty a matice velký význam v řadě matematických disciplín. Mimo jiné umožňují elegantní vyjádření celé řady vlastností matematických objektů. V úvodu této kapitoly se zaměříme na užití matic a determinantů v analytické geometrii.

Jsou-li dány vektory $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$, pak matici

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Příslušný determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

nazýváme determinant souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Pomocí těchto pojmů můžeme stanovit podmínku pro lineární nezávislost vektorů.

Vektory $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$ jsou lineárně nezávislé, právě když příslušný determinat souřadnic těchto vektorů je různý od nuly, tj. když platí

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Podmínku lineární nezávislosti vektorů $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$ lze vyjádřit pomocí hodnosti matice souřadnic. Označíme-li symbolem $h(A)$ hodnost matice souřadnice vektorů $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$, pak platí:
Vektory $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$ jsou lineárně nezávislé, právě když

$$h(A) = 2$$

Podobně může diskutovat lineární nezávislost vektorů v prostoru.

Jsou-li dány vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$, pak matici

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1, & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Příslušný determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

nazýváme determinant souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Pomocí těchto pojmů můžeme stanovit podmínku pro lineární nezávislost vektorů.

Vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ jsou lineárně nezávislé, právě když příslušný determinat souřadnic těchto vektorů je různý od nuly, tj. když platí

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Podmínku lineární nezávislosti vektorů $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ lze vyjádřit pomocí hodnosti matice souřadnic. Označíme-li symbolem $h(A)$ hodnost matice souřadnice vektorů $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$, pak platí:
Vektory $\vec{u}(u_1, u_2), \vec{v}(v_1, v_2)$ jsou lineárně nezávislé, právě když

$$h(A) = 3$$

Pokud bychom uvažovali pouze vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, pak pro matici souřadnic vektorů platí

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ jsou lineárně nezávislé, právě když

$$h(A) = 2$$

Na základě předcházejících tvrzení lze stanovit podmínku pro vzájemnou polohu tří bodů v rovině.
Body $A[x_1, y_1], B[x_2, y_2], C[x_3, y_3]$ leží na téže přímce, právě když platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Předcházející větu lze formulovat i jinak. Body $A[x_1, y_1], B[x_2, y_2], C[x_3, y_3]$ leží na téže přímce, právě když platí

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Úloha
Rozhodněte, zda body $A[1,2], B[2,1], C[3,0]$ leží na téže přímce.

Řešení:
Body A, B, C leží na přímce, právě když platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pro daný determinant platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 6 + 0) - (3 + 0 + 4) = 7 - 7 = 0$$

to však znamená, že dané body A, B, C leží na jedné přímce.

Pomocí determinantu lze vyjádřit i rovnici přímky v rovině. Jsou-li dány body $A[x_1, y_1], B[x_2, y_2]$, pak přímka určená body A, B má rovnici

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

S využitím determinantu lze zapsat podmínku pro rovnoběžnost dvou přímek v rovině.

Přímky

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

jsou rovnoběžné, právě když platí

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Předcházející úvahy lze přenést do prostoru.

Body $A[x_1, y_1, z_1], B[x_2, y_2, z_2], C[x_3, y_3, z_3], D[x_4, y_4, z_4]$ leží v jedné rovině, právě když platí

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Pro rovnici roviny určené body $A[x_1, y_1, z_1], B[x_2, y_2, z_2], C[x_3, y_3, z_3]$, které neleží v jedné přímce, platí

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Dvě roviny dané rovnicemi $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ jsou různoběžné, právě když matice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

má hodnost dvě.

Dvě roviny dané rovnicemi $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ jsou rovnoběžné, právě když matice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

má hodnost jedna.

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.