evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Užití determinantů a matic II
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_14_19
Pořadí DUMu v sadě	19
Vedoucí skupiny/sady	RNDr. Dag Hrubý
Datum vytvoření	4. května 2013
Jméno autora	Dag Hrubý
e-mailový kontakt na autora	hruby@gymjev.cz
Ročník studia	3.
Předmět nebo tematická oblast	Seminář z matematiky – Matice a determinanty
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál obsahuje teoretickou přípravu a menší množství původních příkladů z lineární algebry – konkrétně se jedná o aplikaci determinantů v analytické geometrii (komplanárnost vektorů, objem rovnoběžnostěnu, obsah trojúhelníku a n-úhelníku). **Inovace:** Text je sázen v LaTeXu, čímž jsou podpořeny ICT. Za inovaci lze považovat rovněž méně obvyklý způsob výkladu uvedené kapitoly.

UŽITÍ DETERMINANTŮ A MATIC II

Úloha

Rozhodněte, zda body $A[1,1,3], B[2,1,4], C[3,1,5], D[0,3,3]$ leží v jedné rovině.

Řešení:

body A, B, C, D leží v jedné rovině, právě když platí

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pro daný determinant platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+4+0) - (0+0+4) = 4 - 4 = 0$$

to však znamená, že dané body A, B, C leží v jedné rovině.

Lineárně nezávislé vektory $\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$ se nazývají základní vektory. Pro každý vektor $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ platí

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Pomocí základních vektorů lze vyjádřit vektorový součin. Jsou-li dány vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, pak jejich vektorový součin lze zapsat ve tvaru determinantu

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Rozvinutím determinantu podle prvního řádku dostáváme

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Pokud se nám nelíbí znaménko minus u prostředního členu, můžeme provést následujícíc úpravu

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Pro souřadnice vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ pak platí

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{w} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Jsou-li dány vektory $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$, pak jejich smíšeným součinem nazýváme číslo $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, které značíme $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]$. Pro smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ platí

$$[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Pomocí smíšeného součinu lze rozhodnout o komplanárnosti vektorů. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou komplanární, právě když

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Úloha

Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}(1, 2, 0), \vec{v}(32, -1), \vec{w}(2, 1, 3)$ jsou komplanární.

Řešení:

Pro smíšený součin $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 4 + 0) - (0 - 1 + 18) = -15 \neq 0$$

to však znamená, že dané vektory nejsou komplanární.

Geometrická interpretace smíšeného součinu. Absolutní hodnota smíšeného součinu nekomplanárních vektorů $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ udává objem rovnoběžnostěnu. Označíme-li

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

pak pro objem rovnoběžnostěnu platí

$$V = |\Delta|$$

Pro objem příslušného čtyřstěnu pak platí $V = \frac{1}{6}|\Delta|$.

Determinantem můžeme vyjádřit obsah trojúhelníku pomocí souřadnic jeho vrcholů. Jsou-li dány body $A[x_1, y_1], B[x_2, y_2], C[x_3, y_3]$, pak pro obsah trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Úloha

Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno $A[1,1], B[3,2], C[2,5]$.

Řešení:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (2+2+15) - (4+5+3) = 7$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{7}{2}\, j^2$$

Zajímavý vzorec platí také pro obsah konvexního mnohoúhelníku s vrcholy $A_1[x_1, y_1], A_2[x_2, y_2], \cdots,$ $A_n[x_n, y_n]$.

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

Doporučená a použitá literatura:

[1] Dolciani, M. P., Berman, S. L., Wooton, W.: *Modern algebra and trigonometry*. Thomas Nelson & Sons Limited, Ontario 1964.

[2] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Academia, Praha 2006. ISBN 80-200- 1448-9.

[3] Knichal, V., Bašta, A., Pišl, M., Rektorys, K.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1965.

[4] Holenda, J.: *O maticích.* Vydavatelský servis, Plzeň 2007. ISBN 978-80-86843-16-2.