



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Teorie přirozených a celých čísel
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_03
Pořadí DUMu v sadě	3
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	13. 3. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	4.
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TEORIE PŘIROZENÝCH A CELÝCH ČÍSEL

Čísla přirozená N

Číslice – grafický znak, který slouží k zápisu čísel (jednička).

Číslo – slovo jedna, dva, tři.

Pro každá 3 přirozená čísla a, b, c platí:

Součet $a + b$ je přirozené číslo součin $a \cdot b$ je přirozené číslo (U)

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (A)

$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$ (K)

$a \cdot (b + c) = ab + ac$ (D)

(U)...uzavřenost;

(A)...asociativnost...sčítance (činitele) lze libovolně sdružovat;

(K)...komutativnost... pořadí sčítanců (činitelů) lze zaměnit;

(N)...neutrálnost...číslo 1 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení přirozených čísel;

(D)...distributivnost...násobíme-li číslem součet dvou nebo více čísel, vynásobíme tímto číslem každého sčítance.

Čísla celá Z

Jsou všechna přirozená čísla, k nim opačná a nula.

$Z = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Pro každá 3 celá čísla a, b, c platí:

Součet $a + b$ je celé číslo součin $a \cdot b$ je celé číslo (U)

Rozdíl $a - b$ je celé číslo

$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ (A)

$a + b = b + a$ $ab = ba$ (K)

$0 + a = a$ $1 \cdot a = a$ (N)

$a(b + c) = ab + ac$ (D)

$a + (-a) = 0$ (I)

Číslo opačné k číslu a je rozdíl $0 - a$, který zapisujeme $-a$.

Záporná celá čísla jsou opačná k přirozeným číslům.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přirozené číslo: 1 je přirozené číslo a následník přirozeného čísla je také přirozené číslo
($\in N, n+1 \in N$).

Množina všech přirozených čísel $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Ciferný zápis 125

Rozvinutý zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \quad (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, a_n \neq 0)$$

$$125 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Zápis přirozeného čísla a pomocí zbytku při dělení přirozeným číslem $b > 1$:

$$a = k \cdot b + z, \text{ kde } k \in N \text{ a } z \text{ je zbytek při dělení čísla } a \text{ číslem } b, \text{ přičemž platí } 0 \leq z < b.$$

Příklad: $3k, 3k+1, 3k+2$

Kritéria dělitelnosti:

Přirozené číslo je dělitelné:

- dvěma \Leftrightarrow jeho zápis končí některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8;
- třemi \Leftrightarrow jeho ciferný součet je dělitelný třemi;
- čtyřmi \Leftrightarrow jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi;
- pěti \Leftrightarrow jeho zápis končí číslicí 0 nebo 5;
- šesti \Leftrightarrow je dělitelné dvěma a zároveň třemi;
- osmi \Leftrightarrow jeho poslední trojčíslí je dělitelné osmi;
- devíti \Leftrightarrow jeho ciferný součet je dělitelný devíti;
- deseti \Leftrightarrow jeho zápis končí nulou;
- dvanácti \Leftrightarrow je dělitelné třemi a zároveň čtyřmi.

Prvočíslo – každé přirozené číslo, které má právě 2 různé dělitele, číslo 1 a samo sebe.

Číslo složené – každé přirozené číslo, které má aspoň 3 různé dělitele.

Číslo 1 není ani prvočíslo ani složené číslo.

Nejmenší společný násobek čísel a, b, c je součin mocnin všech prvočísel, která se vyskytují aspoň v jednom prvočíselném rozkladu čísel a, b, c ; přitom exponent každého prvočísla je **největší** exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c .

Největší společný dělitel čísel a, b, c je součin mocnin těch prvočísel, která se současně vyskytují ve všech prvočíselných rozkladech čísel a, b, c ; přitom exponent každého prvočísla je **nejmenší** exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c .

Čísla soudělná – čísla a, b jsou soudělná \Leftrightarrow mají společného dělitele většího než 1.

Čísla nesoudělná – čísla a, b jsou nesoudělná \Leftrightarrow mají jediného společného dělitele 1.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo a je **násobkem** čísla $b \Leftrightarrow$ existuje přirozené číslo k , že $a = k.b$.

Číslo b je **dělitelem** čísla $a \Leftrightarrow$ existuje přirozené číslo k , že $a = k.b$; b/a .

Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p , pro které platí $p \leq \sqrt{n}$.

Základní věta aritmetiky:

Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru:

$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla a r_1, r_2, \dots, r_k jsou přirozená čísla.

$a/b \wedge a/c \Rightarrow a/(nb + nc)$.

$D(x, y) \cdot D(x, y) = x \cdot y$

Prvočíselný rozklad – zápis složeného čísla ve tvaru součinu, jehož každý činitel je prvočíslo.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY:

1. Určete $D(60,84)$ a $n(60,84)$ pomocí prvočíselných rozkladů.

Řešení:

$$D(60,84) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 12$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$n(60,84) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

$$\underline{\text{Zkouška}} \Rightarrow \underline{\text{věta}} \quad n(a,b) \cdot D(a,b) = a \cdot b \Rightarrow 60 \cdot 84 = 12 \cdot 420 = 5\,040$$

Pro tři a více čísel to neplatí.

2. V čísle $73*21$ doplňte na místo označené hvězdičkou číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné devíti.

3. Určete všechny jednociferné dělitele čísla 10296.

4. Vypočítejte co nejúsporněji:

a) $96 + 35 + 4$

b) $4 \cdot 324 \cdot 25$

c) $182 + 91 + 372 + 28 + 18 + 128 + 9$

d) $67 + 327 + 33$

e) $5 \cdot 753 \cdot 2$

f) $2 \cdot 293 + 8 \cdot 293$

5. V rozvinutém zápise čísla $a = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + x$ určete číslici x tak, aby číslo a bylo dělitelné a) čtyřmi, b) devíti.

6. Nejmenší společný násobek čísla 2 190 a trojčíselného čísla x je 65 700. Určete číslo x .

A) 600

B) 700

C) 800

D) 900

7. Rozhodněte, zda číslo 127 je prvočíslo.

Řešení:

Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p , pro které platí $p \leq \sqrt{n}$.

$$\sqrt{127} \doteq 11 \Rightarrow p \in \{3, 5, 7, 11\}$$

127 je **prvočíslo**, protože není dělitelné 2, 3, 5, 7, 11.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Zjistěte, zda součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný čtyřmi.
9. Určete průnik množin $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 7\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq -2\}$.
10. Vypočtěte $-10 - (-10) - 10 - (-10) + 10 - (-10)$.
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40
11. O kolik stupňů Celsia se změnila teplota, byla-li původně -8°C a nyní je 5°C ?
A) 13°C B) -13°C C) 15°C D) -15°C
12. Řešte v oboru celých čísel rovnici $x^2 = 625$.
13. Vypočtěte $\left\langle 3^0 \right\rangle + \left\langle 3^1 \right\rangle + \left\langle 3^2 \right\rangle + \left\langle 3^3 \right\rangle + \left\langle 3^4 \right\rangle$.
14. Myslím si trojčíferné sudé číslo větší než 300. Když je vydělím pěti, dostanu zbytek 3. Když je vydělím sedmi či devíti, dostanu zbytek 0. Určete, jaké číslo si myslím.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

1. Řešený

2. 5

3. 2, 3, 4, 6, 8, 9

4. a) 135, b) 32 400, c) 828, d) 427, e) 7530, f) 2930

5. a) 2 a 6; b) 4.

6. D

7. Řešený

8. Není dělitelný čtyřmi.

9. $A \cap B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

10. B

11. A

12. $K = \pm 25$

13. 61

14. 378



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a pramenů:

1. Vejsada, F., Talafous, F.: Sbíрка úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. 688s. ISBN 15-534-69.
2. Hudcová, M., Kubičiková, L.: Sbíрка úloh z matematiky. Prometheus, Praha 2003. 415s. ISBN 80-7196-165-5.
3. Kubát, J.: Sbíрка úloh z matematiky. VICTORIA PUBLISHING, Praha 1993. 399s. ISBN 80-85605-27-9.
4. Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbíрка úloh pro střední školy. Prometheus, Praha 1996. 195s. ISBN 80-7196-030-6.
5. Hruška, M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení. Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012. 190s. ISBN 80-7346-149-2.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.

Dílo smí být šířeno pod licencí CC BY – SA.