INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Algebraické rovnice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_05
Pořadí DUMu v sadě	5
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	9. 2. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	4.
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Rovnicí rozumíme zápis rovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno – - **neznámá,**číslo, které po dosazení do rovnice za neznámou splňuje rovnici – **řešení (kořen).**
Vyřešit rovnici znamená najít všechna její řešení, tj. množinu všech jejích řešení.
Dvě rovnice, které mají stejné množiny všech řešení, se nazývají **ekvivalentní.**
Ekvivalentní úprava převede rovnici na s ní ekvivalentní (se stejnou množinou všech řešení)

- Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice.
- Přičtení stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice.
- Vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem.
- Ekvivalentní úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice.

Důsledková úprava převede rovnici o větším počtu řešení, např. umocnění.
Zkouška ověří, zda číslo x je či není řešením rovnice (ověříme dosazením do L a P strany). Je nutná, pokud jsme rovnici řešili důsledkovými úpravami.
Grafické řešení rovnice výrazy na obou stranách rovnice považujeme za funkce , sestrojíme jejich grafy a průsečík je řešením rovnice.

Základní věta algebry: Každá rovnice n - tého stupně má v množině reálných čísel nejvýše n kořenů.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Rovnice $ax + b = 0,$ kde $a, b \in R$ se nazývá **lineární rovnice** s neznámou x .
Řešení : $ax + b = 0$

- je-li $a \neq 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a};$
- je-li $a = 0 \ \wedge b = 0 \Rightarrow x \in R;$
- je-li $b \neq 0 \Rightarrow$ rovnice nemá řešení.

Rovnice v **součinovém tvaru:** $(ax + b)(cx + d) = 0$

Řešení: $[(ax + b) = 0 \vee (cx + d) = 0] \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{b}{a} \right) \vee \left(x = -\dfrac{d}{c} \right)$

Rovnice v **podílovém tvaru:** $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 0$

Řešení: $(ax + b = 0) \wedge (cx + d \neq 0) \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{b}{a} \right) \wedge \left(x \neq -\dfrac{d}{c} \right)$

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R, c \neq 0$ se nazývá **kvadratická rovnice** s neznámou x, ax^2 - kvadratický člen, bx - lineární člen, c – absolutní člen.

Kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2 + bx = 0$, kořeny $x = 0, x = -\frac{b}{a}$.

Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$, kořeny $x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \right) \vee N\check{R}$.

Obecná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde **diskriminant** $D = b^2 - 4ac$.

- Je-li **D** < 0 $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.
- Je-li **D** = 0 $\Rightarrow$ dvojnásobný kořen $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.
- Je-li **D** > 0 $\Rightarrow$ dva různé reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Vietovy vzorce: $x_1 + x_2 = -p, x_1 . x_2 = q$, kde $x^2 + px + q = 0$.

Platí: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$, kde $x_{1,2}$ jsou kořeny rovnice.

Lineární rovnice se dvěma neznámými x, y je rovnice tvaru $ax + by + c = 0$.

Obrazem množiny všech řešení je přímka,je-li $a = 0 \Rightarrow p \parallel x$, je-li $b = 0 \Rightarrow p \parallel y$, je-li c = 0, pak přímka prochází počátkem.

Soustava rovnic je složena z n – rovnic o n-neznámých; množina řešení je průnik množiny řešení jednotlivých rovnic; řešením je uspořádaná n-tice

Metody řešení:

- sčítací
- dosazovací
- maticí

Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě se řeší metodou nulových bodů (čísla, pro která jsou hodnoty výrazů v absolutních hodnotách rovny nule).

Příklad: $|x - 3| = 2 \Rightarrow x_0 = 3$ (nulový bod) $\Rightarrow I_1 = (-\infty, 3), I_2 = \langle 3, \infty)$…intervaly.

Rovnice s parametrem je rovnice, v níž řešení závisí na hodnotě proměnné – parametru.

PŘÍKLADY:

1. Z daných vztahů vyjádřete veličinu uvedenou v závorce:

a) $W = m\,.\,g\,.\,h$, (m) b) $t = \dfrac{2s}{v}$, (s) c) $v = v_0 + gt$, (t)

d) $S = \dfrac{a+c}{2}\cdot v$, (a) e) $x + 2 = bx + t$, (x) f) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$, (f)

g) $m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t)$, (t)

2. a) Z rovnice $\dfrac{mv^2}{r} = evB$ vyjádřete r.

b) Určete hodnotu r pro $B = 3\cdot 10^{-3}T, m = 9.10^{-31}kg, v = 3{,}2.10^{7}ms^{-1}, e = 1{,}6.10^{-19}C.$

3. Řešte v R rovnice:

a) $x - \dfrac{7x-3}{5} = \dfrac{1-2x}{3} + \dfrac{2x+6}{5}$ b) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+5}{3}$

c) $\dfrac{10x+21}{15} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5x}{3} - (x-1)$ d) $2x - \dfrac{1-\frac{3x}{2}}{2} - \dfrac{4-\frac{x}{2}}{3} = 4$

e) $5 - 14(x-1) = (3x-4)^2 - (x-5)\cdot(9x-1)$

f) $(x-1)^3 - (x+1)^3 = 3(x-2)(1-2x) - 9(x+1) - 9(x-1)$

4. Řešte v R rovnice:

a) $3x^2 = 16x$ b) $2x^2 - 12x = 0$ c) $5x^2 - 125 = 0$

d) $13 - 6x^2 = 61$ e) $1{,}4x^2 - 3 = 2$ f) $(x-3)^2 = 57 - 12x$

5. Řešte v R rovnice:

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$ b) $x^2 + 4x = -4x - 15$ c) $2x^2 + 13x + 29 = 7 - 11x$

d) $5x^2 - 2x - 3 = 0$ e) $2x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{9} = 0$ f) $x^2 + 4 = x$

6. Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla:

a) $2, -3$ b) $3, \frac{1}{5}$ c) $3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2}$

7. U daných kvadratických rovnic určete kořen x_2 a koeficient m, znáte-li kořen x_1:

a) $x^2 + mx + 24 = 0, \quad x_1 = -3$ b) $x^2 + 7x + m = 0, \quad x_1 = 5$

c) $3x^2 + mx + 2 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{3}$

8. Řešte v R rovnice:

a) $\frac{3}{5} - \frac{20-x}{5x} = 0$ b) $3 + \frac{4}{4x-12} = \frac{4-x}{x-3}$ c) $1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x^2+2x}$

d) $\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x+1} = 1$ e) $\frac{5x-1}{x-3} + 3 = 1 - \frac{7x-7}{3-x}$ f) $\frac{x^2}{x-1} - x = \frac{x}{x-1} - \frac{2x^2+1}{x^2-x}$

9. Rovnici $\frac{x-3}{15} = \frac{2}{x} - \frac{x}{3}$ **řešte:** $a)\, v\, Z$ $b)\, v\, \langle 0, +\infty)$ $c)\, v\, N$

10. Řešte v R rovnice:

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3x-2}$ b) $\sqrt{x^2-40} = x-4$ c) $4 \cdot \sqrt{x+6} = x+6$

d) $\sqrt{8-4x} + 3 = x$ e) $x + 5 + 7\sqrt{x-1} = 0$ f) $\sqrt{9x^2 - \sqrt{12x+2}} = 3x+1$

g) $\sqrt{x-7} = \sqrt{x+9} - 2$ h) $x - 21\sqrt{x} + 20 = 0$ i) $\sqrt{x^2+4} + 12 = x^2 + 4$

11. Řešte v R rovnice:

a) $|1+2x| = 8$ b) $|x-2| = -9$ c) $|x^2-4x| = 0$

d) $|x^2+2x+2| = 5$ e) $|x^2+x+2| = 2$ f) $|x^2+3x+2| = |x+2|$

g) $|3x^2+3x-4| = |3x^2+7x|$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

12. Pro $x, y \in R$ **řešte soustavy rovnic:**

a) $\dfrac{2x-3y}{5}+\dfrac{3x-5y}{3}=x+1$

$\dfrac{3x-2y}{3}+\dfrac{3x-4y}{2}=y+1$

b) $(x-3)(y-5)=(x-1)(y-8)$

$(2x+3)(6y-5)=2(6x+6)(y-1)$

13. Pro $x, y, z \in R$ **řešte různými metodami soustavu rovnic:**

$$x-y-z=0$$
$$8x+3y=9$$
$$-3y+6z=18$$

14. Řešte v R soustavu rovnic:

$$x+y+z+t=2$$
$$-x+y+z+t=0$$
$$x-y+z+t=4$$
$$x-y+z-t=0$$

15. Řešte v R soustavu rovnic:

$$x^2+y^2+4x-2y=0$$
$$x+y+2=0$$

ŘEŠENÍ:

1. $a)$

$$m=\frac{W}{gh};b)s=\frac{t\cdot v}{2};c)t=\frac{v-v_0}{g};d)a=\frac{2S}{v}-c;e)x=\frac{t-2}{1-b};f)f=\frac{ab}{a+b};g)t=\frac{m_1c_1t_1+m_2c_2t_2}{m_1c_1+m_2c_2}$$

2. $a)r=\dfrac{m\cdot v}{B\cdot e};b)r=6\cdot 10^{-2}m=6cm$.

3. $a)\ \{-7\};\ b)\ \phi;\ c)R;\ d)\ \{2\};\ e)\left\{\frac{2}{9}\right\};\ f)\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

4. $a)\left\{0,\frac{16}{3}\right\};\ b)\ \{0,6\};\ c)\ \{-5,5\};\ d)\ \phi;\ e)\left\{-\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{5\sqrt{7}}{7}\right\};\ f)\ \{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\}$.

5. $a)\ \{-2,6\};\ b)\ \{-3,-5\};\ c)\ \{-11,-1\};\ d)\left\{-\frac{3}{5},1\right\};\ e)\left\{\frac{1}{3}\right\};\ f)\ \{\ \}$.

6. $a)x^2+x-6=0;\quad b)5x^2-16x+3=0;\quad c)x^2-6x+7=0.$

7. $a)x_2=-8,\quad m=11;\quad b)x_2=-12,\quad m=-60;\quad c)x_2=-2,\quad m=7.$

8. $a)\ \{5\};\ b)\phi;\ c)\ \{-1\};\ d)\ \{0,-4\};\ e)R-\{3\};\ f)\phi.$

9. $a)\ \{-2\};\ b)\left\{\frac{5}{2}\right\};\ c)\phi.$

10. $a)\phi;\ b)\ \{7\};\ c)\ \{-6,10\};\ d)\phi;\ e)\phi;\ f)\left\{-\frac{1}{6}\right\};\ g)\ \{1,5\};\ h)\ \{1,400\};\ i)\ \{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\}$.

11. $a)\left\{-\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right\};\ b)\phi;\ c)\ \{0,4\};\ d)\ \{-3,1\};\ e)\ \{-1,0\};\ f)\ \{-2,0\};\ g)\left\{-2,-1,\frac{1}{3}\right\}$.

12. $a)\left\{\left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right]\right\};\quad b)\left\{\left[-\frac{5}{3},1\right]\right\}$.

13. $\{1,5;-1;2,5\}$.

14. $\{[-1,0,2]\}$.

15. $\{[-4,2];[-1,-1]\}$.

Seznam použité literatury a pramenů:

1. Vejsada,F., Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. 688s. ISBN 15-534-69.
2. Hudcová,M., Kubičíková,L.: Sbírka úloh z matematiky. Prometheus, Praha 2003.415s. ISBN 80-7196-165-5.
3. Kubát,J.: Sbírka úloh z matematiky.VICTORIA PUBLISHING, Praha 1993. 399s. ISBN 80-85605-27-9.
4. Kubát,J., Hrubý,D.,Pilgr,J.: Sbírka úloh pro střední školy. Prometheus, Praha 1996. 195s. ISBN 80-7196-030-6.