



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Exponenciální, logaritmické funkce a rovnice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_06
Pořadí DUMu v sadě	6
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	20.10.2012
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



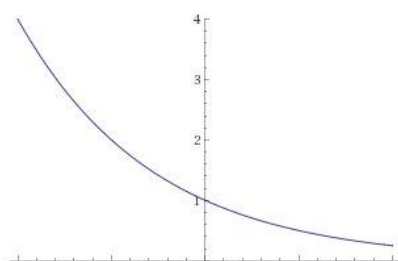
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Exponenciální, logaritmické funkce a rovnice

Exponenciální funkce o základu a je každá funkce na množině \mathbb{R} , která je dána ve tvaru $y = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

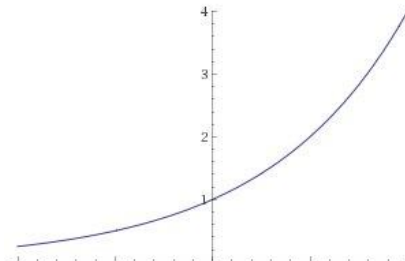
$0 < a < 1$



$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}^+$, $(-\infty, +\infty)$ klesající,

prostá, zdola omezená, nemá max. ani min.

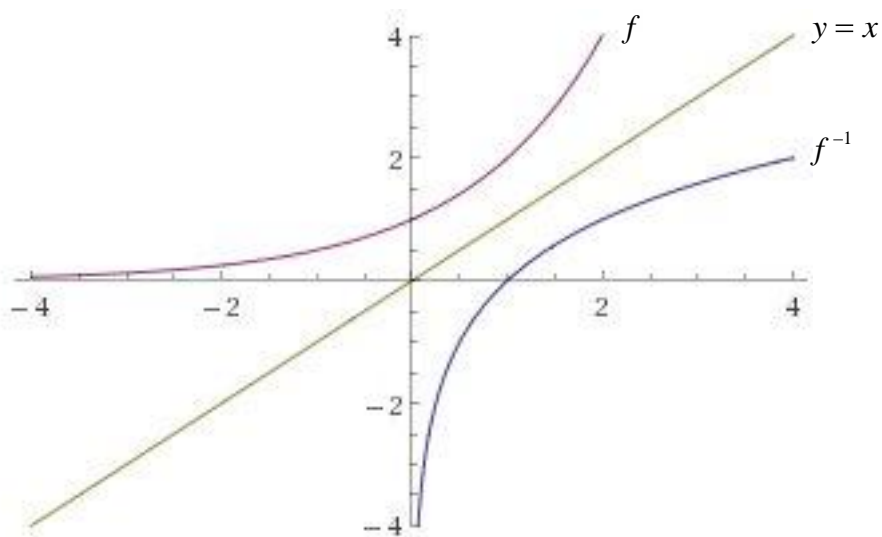
$a > 1$



$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}^+$, $(-\infty, +\infty)$ rostoucí,

prostá, zdola omezená, nemá max. ani min.

Funkce inverzní k funkci $f : y = a^x$ je funkce $f^{-1} : y = \log_a x$ (obrázek nakreslen pro $a = 2$).





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přirozená exponenciální funkce o základu e je funkce na množině \mathbb{R} , která je dána ve tvaru $y = e^x$, kde $e = 2,718281828$ je *Eulerovo číslo*.

Funkce k ní inverzní je $f^{-1} : y = \ln x$ se nazývá přirozená logaritmická funkce.

Exponenciální rovnici rozumíme každou rovnici, v níž se vyskytují mocniny s neznámou v mocniteli.

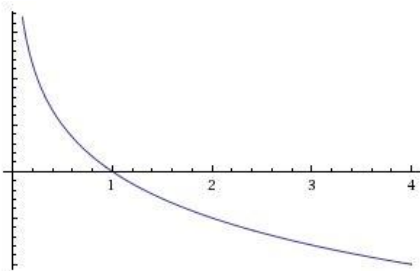
$$\text{Pro } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Tyto rovnice řešíme buď zlogaritmováním, nebo graficky.

Logaritmická funkce o základu a $y = \log_a x$ je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

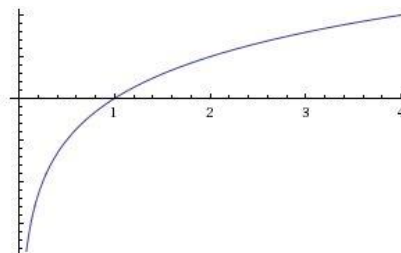
$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$



$$D_f = \langle 0, +\infty \rangle, \quad H_f = \mathbb{R}, \text{ klesající, prostá,}$$

neomezená, nemá max. ani min.



$$D_f = \langle 0, +\infty \rangle, \quad H_f = \mathbb{R}, \text{ rostoucí, prostá,}$$

neomezená, nemá max. ani min.

Funkce inverzní k funkci $f : y = \log_a x$ je funkce $f^{-1} : y = a^x$.

Logaritmus čísla r o základu a je takové číslo v , pro které platí $a^v = r$:

$$\log_a r = v \Leftrightarrow a^v = r$$

$$\langle = a^{\log_a r} \rangle$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Věty o logaritmech: Pro $\forall a > 0, a \neq 1$ a pro $\forall r, s \in \mathbb{R}^+$:

- $\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$
- $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
- $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$

Pro $\forall r, s > 0, r, s \neq 1$ a pro $\forall t \in \mathbb{R}^+$: $\log_r t = \frac{\log_s t}{\log_s r}$

Dekadický logaritmus: $a = 10$ zapisujeme $y = \log x$

Přirozený logaritmus: $a = e$ zapisujeme $y = \ln x$

Logaritmickou rovnicí rozumíme každou rovnici, v níž se neznámá vyskytuje v logaritmickém výrazu.

Pro $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Tyto rovnice lze obecně řešit jen graficky, ve speciálních případech je lze převést vhodnou substitucí na algebraické rovnice (je-li stejný základ).



evropský
sociální
fond v ČR



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY:

1. Daná čísla porovnejte s číslem 1:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}}, \sqrt{36}; 0,8^{-\frac{2}{3}}$$

2. Co lze říci o číslech m, n , platí-li:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{4}\right)^m < \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{b) } 2,5^m < 2,5^n \quad \text{c) } 0,7^m > 0,7^n$$

3. Načrtněte graf a popište vlastnosti funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f: y = 5^x & \text{d) } f: y = \log_2 x - 1 \\ \text{b) } g: y = 5^{x-1} & \text{e) } g: y = \log_2 \left(\left[-1 \right] \right) \\ \text{c) } h: y = 5^{x-1} - 1 & \text{f) } h: y = \log_3 \left(\left[-2 \right] + 1 \right) \end{array}$$

4. K funkci $f: y = 3^x - 1$ a $g: y = 10 + \log \left[+1 \right]$ najdi funkci inverzní a sestroj její graf.

5. Řešte v R:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2^{x+2} - 2^x = 96 & \text{b) } 3^{x-3} = 108 - 3^{x-2} \\ \text{c) } 3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315 & \text{d) } 5^{1-x} = 7^{x-1} \end{array}$$

6. Určete x , jestliže platí:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \log_2 x = 3 & \text{b) } \log x = -2 & \text{c) } \log_8 x = \frac{2}{3} & \text{d) } \log_4 x = -\frac{3}{2} \\ \text{e) } \log_x 16 = 2 & \text{f) } \log_x \frac{1}{27} = -3 & \text{g) } \log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2} & \text{h) } \log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

7. Vypočtete:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 2 \cdot \log_5 25 + 3 \cdot \log_2 64 + \log_3 \frac{1}{9} \\ \text{b) } 2 \cdot \log_3 \sqrt{27} - \log_3 1 + \log_3 \frac{1}{27} - \log_3 3 \\ \text{c) } A = \log_{10} \sqrt[8]{1000} \\ \text{d) } B = \left(\log_5 25 - \log_{\frac{1}{3}} 729 \right)^3 \end{array}$$

8. Určete definiční obory funkcí:

$$\text{a) } f: y = \log_2 \left[-5 \right] \quad \text{b) } g: y = \log_{0,5} \left[x \right] \quad \text{c) } h: y = \log \sqrt{x+2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

d) $k: y = \log\left(\frac{-3}{x+1}\right)$

e) $l: y = \log(-x^2)$

f) $m: y = \log\left(\frac{1-x}{1+x} - 1\right)$

9. Řešte v R:

a) $\log_3 x - 3 \cdot \log_3 x - 10 = 0$

b) $2 \cdot \log x = 3 + \frac{2}{\log x}$

c) $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

d) $(\log x + \log x) \log x = -1$

e) $\frac{\log 2x}{\log(x-15)} = 2$

f) $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 2$

10. V R řešte nerovnice:

a) $3^{3-x^2} < 9^x$

b) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 > 0$



evropský
sociální
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

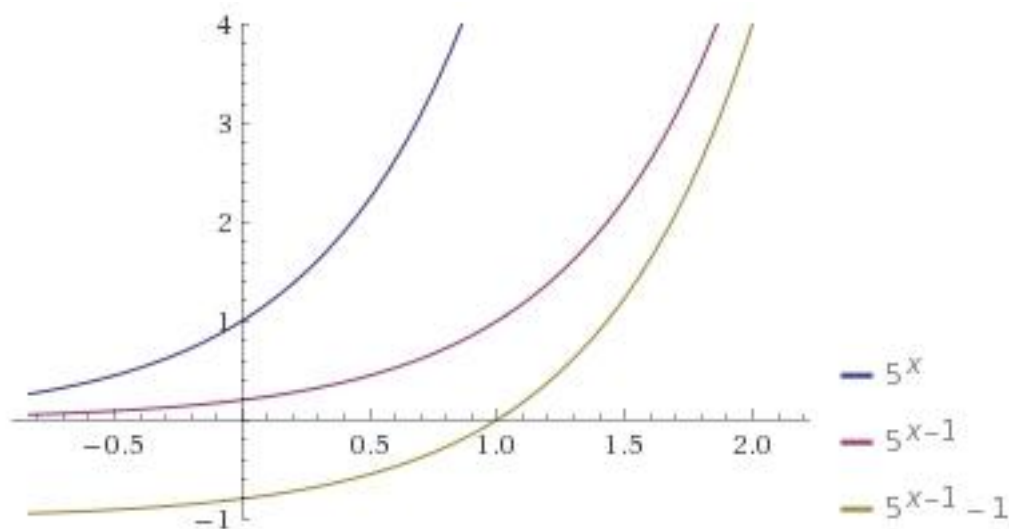
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

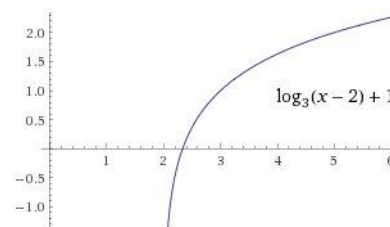
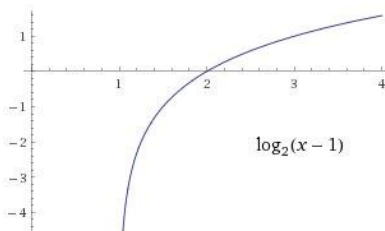
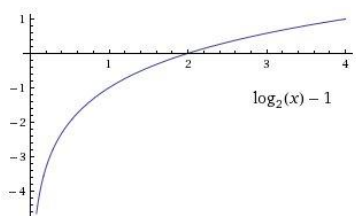
1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} < 1, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}} > 1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}} < 1, 0,36^{\frac{1}{4}} = 1; 0,8^{-\frac{2}{3}} > 1$

2. a) $m > n$, b) $m < n$, c) $m < n$

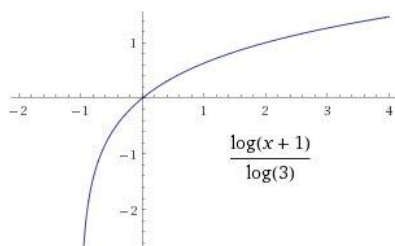
3. a), b), c)



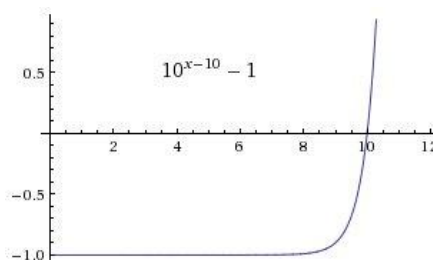
3. d), e), f)



4. a)



4. b)



5. a) $x = 5$, b) $x = 6$, c) $x = 3$, d) $x = 1$

6. a) $x = 8$, b) $x = \frac{1}{100}$, c) $x = 4$, d) $x = \frac{1}{8}$, e) $x = 4$, f) $x = 3$, g) $x = \frac{1}{4}$, h) $x = 8$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. a) $x = 20$, b) $x = -1$, c) $x = \frac{3}{8}$, d) $x = 512$

8. a) $x \in \langle 6, \infty \rangle$, b) $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$, c) $x \in \langle -2, \infty \rangle$, d) $x \in \langle -\infty, -1 \rangle$, e) $x \in \langle 3, 3 \rangle$, f) $x \in \langle 1, 0 \rangle$

9. a) $x = \left\{ 243, \frac{1}{9} \right\}$, b) $x = \left\{ 100, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\}$, c) $x = \left\{ \frac{1}{100}, 10^3 \sqrt{100} \right\}$, d) $x = \frac{1}{10}$, e) $x = \left\{ \frac{25}{8}, \frac{9}{2} \right\}$, f) $x = 101$

10. a) $x \in \langle -\infty - 3 \rangle \cup \langle \infty \rangle$, b) $x \in \langle \infty \rangle$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam literatury a pramenů

1. Vejsada, F., Talafous, F.: Sbíрка úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. ISBN 15-534-69.
2. Obrázky jsou vlastními obrázky autora, tvořené pomocí <http://www.wolframalpha.com> a grafického programu Gimp.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.