



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_08
Pořadí DUMu v sadě	8
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	3.11.2012
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

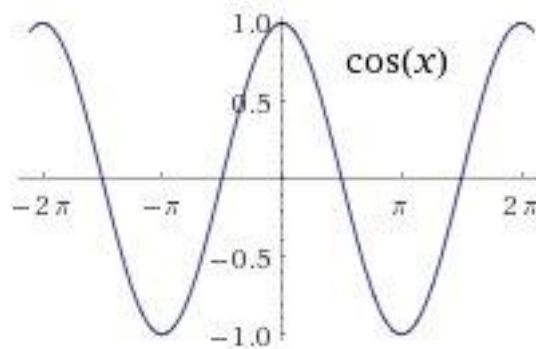
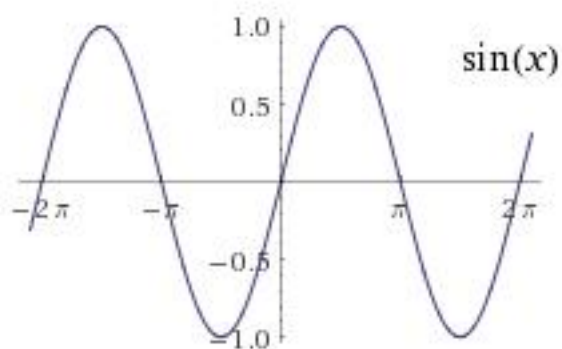
Orientovaný úhel je úhel, u něhož je určeno, které rameno je počáteční; druhé rameno je koncové.

Základní velikost orientovaného úhlu AVB je velikost toho úhlu AVB, který vytvoří polopřímka VA otočením na polopřímku VB v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). Je to vždy číslo z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ resp. $\langle 0; 360^\circ \rangle$.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí:

Sinus úhlu α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony.

Kosinus úhlu α je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony.



$$D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1, 1 \rangle,$$

$$\text{rostoucí } \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

$$\text{klesající } \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle$$

lichá, omezená, maximum v bodě $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $x = 2k\pi$

minimum v bodě $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$$D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1, 1 \rangle,$$

$$\text{rostoucí } \langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$$

$$\text{klesající } \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$$

sudá, omezená, maximum v bodě

minimum v bodě $x = \pi + 2k\pi$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

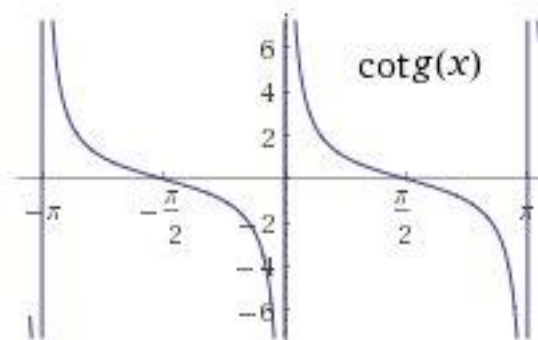
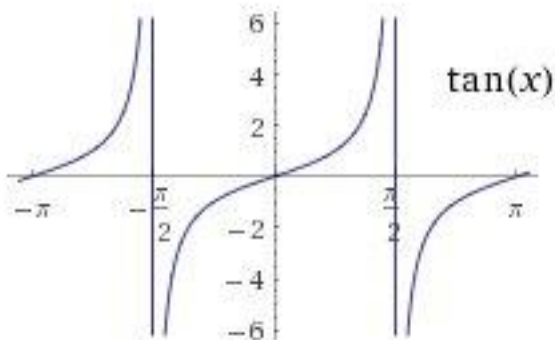


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tangens úhlu α je poměr délek protilehlé odvěsny k úhlu α a přilehlé odvěsny.

Kotangens úhlu α je poměr délek přilehlé odvěsny k úhlu α a odvěsny protilehlé.



$$D_f = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right); H_f = R$$

$$D_f = (0 + k\pi; \pi + k\pi), H_f = R$$

rostoucí $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, lichá, neomezená,

klesající $(k\pi, \pi + k\pi)$, lichá, neomezená,

nemá maximum ani minimum

nemá maximum ani minimum

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X
cotg	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \tan \alpha = \cot g(90^\circ - \alpha), \cot g \alpha = (90^\circ - \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot g \alpha}$$

$$\cot g \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY:

- Velikosti úhlů v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové:
 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ, 1268^\circ$.
(Výsledky zapište jako racionální násobky čísla π).
- Velikosti úhlů v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:
 - $\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{10}\pi, \frac{126}{3}\pi$
 - 0,75; 2,4; 5,3; 4,1; 6,6;
- Na jednotkové kružnici zobrazte body, které jsou přiřazeny těmto reálným číslům:
 $\frac{1}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi, 3\pi, -4\pi, -\frac{8}{3}\pi, -\frac{15}{2}\pi$
- Řešte v R rovnice:
 - $\sqrt{3} \tan x = -3$
 - $\cos 2x = -\frac{1}{2}$
 - $2 \sin x + \frac{1}{\cos x} = 0$
 - $2\sqrt{3} \cotg \left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -2$
 - $\sin 2x + \cos x = 0$
 - $\sin x - \cos 2x = 0$
 - $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$
- Zjednodušte:
 - $\cos\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) - \cos\left(\frac{1}{6}\pi + x\right)$
 - $\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$
 - $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$
- Načrtněte grafy těchto funkcí:
 - $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 - $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
 - $y = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 - $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$
 - $y = -|\cos x|$
 - $y = \sin|x|$
- Pomocí hodnot $\cos x$ vyjádřete $\cos 3x$.
- Vyjádřete $\sin 3x$ pomocí hodnot $\sin x$. Správnost ověřte dosazením $x = 60^\circ$.
- Vyjádřete jako součin $\sin 3y + \sin y$
- Dokažte, že pro přípustné hodnoty x, y platí:
 - $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$
 - $\cotg x + \cotg y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

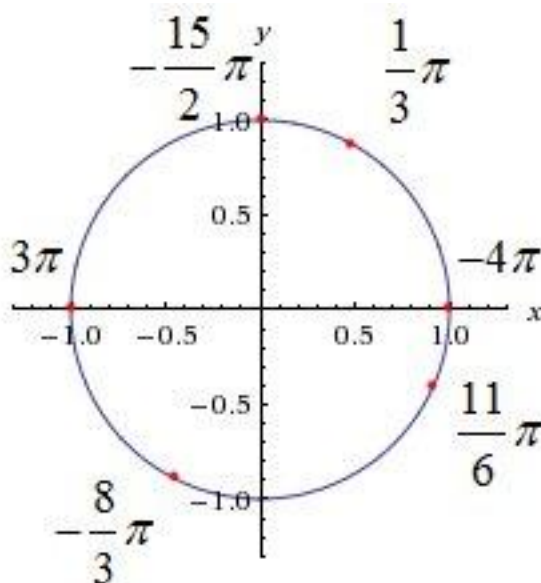
ŘEŠENÍ:

1. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi, \frac{317\pi}{45}$

2. a) $45^\circ, 150^\circ, 240^\circ, 630^\circ, 162^\circ, 7380^\circ$

b) $42^\circ 58' 18,6'', 137^\circ 30' 35,53'', 303^\circ 40' 3,47'', 234^\circ 54' 45,71'', 378^\circ 9' 7,72''$

3.



4. a) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, b) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, c) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, d) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi$,

e) $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$, f) $x = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$,

g) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

5. a) $\sqrt{3} \sin x$, b) 1, c) $\tan x$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



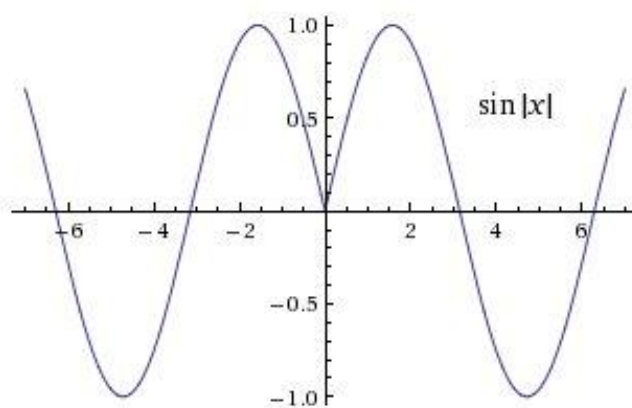
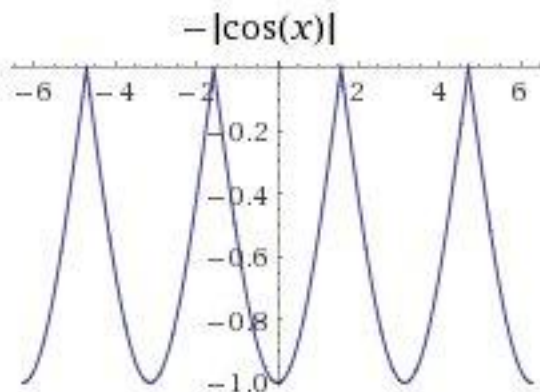
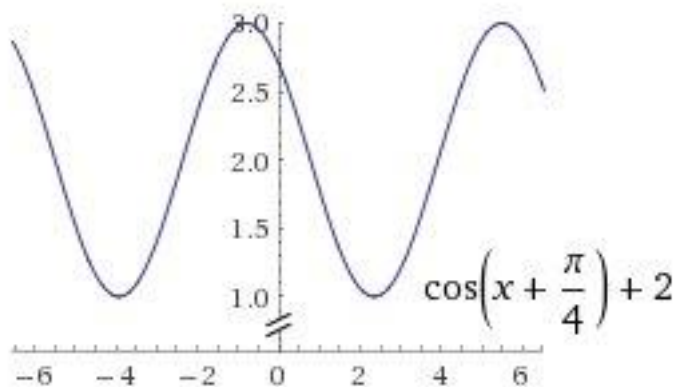
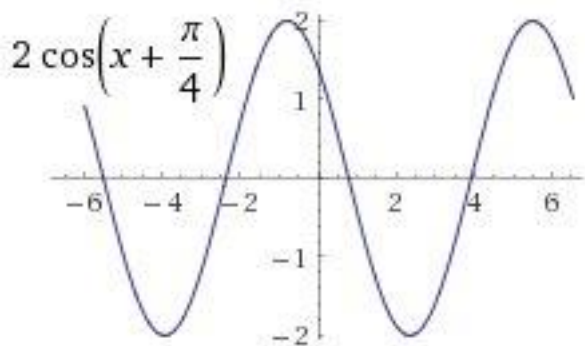
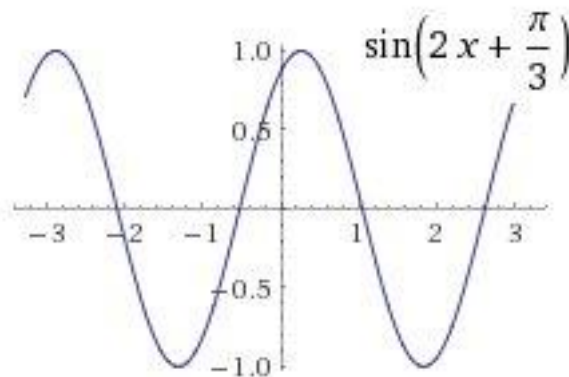
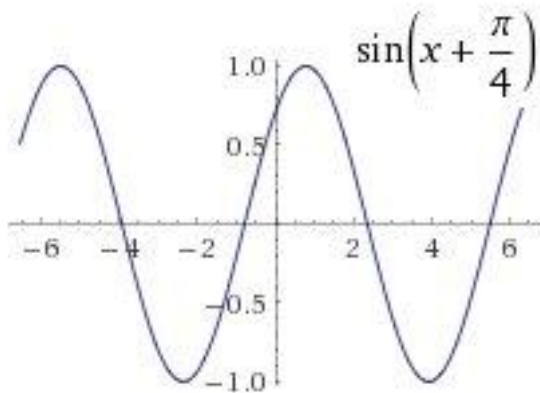
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

6.



7. $4\cos^3 x - 3\cos x$

8. $3\sin x - 4\sin^2 x$

9. $4\sin y \cdot \cos^2 y$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam literatury a pramenů

1. Vejsada, F., Talafous, F.: Sbírká úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. ISBN 15-534-69.
2. Obrázky jsou vlastními obrázky autora, tvořené pomocí <http://www.wolframalpha.com> a grafického programu Gimp.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.