evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Absolutní hodnota
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_10
Pořadí DUMu v sadě	10
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	6. 4. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	4.
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ABSOLUTNÍ HODNOTA

Absolutní hodnota reálného čísla a je reálné číslo, pro které platí:

1. Je-li $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$.
2. Je-li $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$.

Platí: $|a| \geq 0; |-a| = |a|; a \leq |a|; \sqrt{a^2} = |a|; |a.b| = |a|.|b|; \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0; |a-b| = |b-a|$.

Geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla:
Absolutní hodnota reálného čísla je vzdálenost obrazu tohoto čísla od počátku na číselné ose.
Pro každé $k \in R^+$ platí:

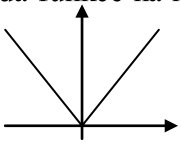
- $\{x \in R; |x| = k\} = \{-k, k\}$
- $\{x \in R; |x| \leq k\} = \langle -k, k \rangle$
- $\{x \in R; |x| < k\} = (-k, k)$
- $\{x \in R; |x| \geq k\} = (-\infty, -k\rangle \cup \langle k, +\infty)$
- $\{x \in R; |x| > k\} = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Pro každé $k \in R^+, a \in R$ platí:

- $\{x \in R; |x-a| = k\} = \{a-k, a+k\}$
- $\{x \in R; |x-a| \leq k\} = \langle a-k, a+k \rangle$
- $\{x \in R; |x-a| < k\} = (a-k, a+k)$
- $\{x \in R; |x-a| \geq k\} = (-\infty, a-k\rangle \cup \langle a+k, +\infty)$
- $\{x \in R; |x-a| > k\} = (-\infty, a-k) \cup (a+k, +\infty)$

Rovnice a nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě se řeší metodou nulových bodů (čísla, pro která jsou hodnoty výrazů v absolutních hodnotách rovny nule).
Příklad: $|x-3| = 2$; $x_0 = 3$; $I_1 = (-\infty, 3), I_2 = \langle 3, \infty)$.

Funkce absolutní hodnota je každá funkce na množině R, která je dána ve tvaru $y = |x|$.



$D_f = R, H_f = R^+, x < 0$ klesající, $x > 0$ rostoucí, zdola omezená, sudá.

PŘÍKLADY:

1. Vypočtěte:

a) $\left|15-3\cdot 2-3^2\right|-\left|(-2)^3-(-3)^2\right|+14:\left|-2\right|$

b) $\left|-3^0-(3-11)^2\right|-\left|2\frac{1}{3}:\frac{7}{3}\right|+\left|-0{,}1\right|\cdot\left|-0{,}2\right|\cdot 0{,}3$

2. Řešte rovnice:

a) $|x|=5$ b) $|x|=0$ c) $|x|=-3$

Řešení:

Označíme-li K množinu všech řešení příslušné rovnice, platí:

a) $K=\{-5,5\}$

b) $K=\{0\}$

c) $K=\phi$, neboť $|x|\geq 0$ pro každé reálné číslo x.

3. Řešte rovnici $|x-3|=1$

Řešení:

Z geometrické představy $\Rightarrow$ číslo x je řešením rovnice $|x-3|=1$ právě tehdy, když vzdálenost jeho obrazu od obrazu čísla 3 je rovna 1. Taková čísla x existují dvě, a to $x_1=3-1=2$ a $x_2=3+1=4$.

4. Řešte rovnice:

a) $|x+5|=6$ b) $|1-x|=7$ c) $|2x-1|=3$

Řešení:

a) $|x+5|=6$

$|x-(-5)|=6$

$K=\{-11,1\}$

b) $|1-x|=7$

$|-(x-1)|=7$

$|x-1|=7$

$K=\{-6,8\}$

c) $|2x-1|=3$

$\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|=3$

$|2|\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|=3$

$\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$

$K=\{-1,2\}$

5. Řešte rovnici $|x-1|+|2x-4|=3$

Řešení:

Nulové body dvojčlenů uvnitř absolutních hodnot jsou 1 a 2. Těmito body rozdělíme množinu R na tři intervaly $(-\infty,1)$, $\langle 1,2)$ a $\langle 2,+\infty)$. Zjistíme, jak se v těchto intervalech „ chovají“ dvojčleny uvnitř absolutních hodnot i absolutní hodnoty samé a řešíme rovnici v každém intervalu zvlášť.

a) Pro $x \in (-\infty,1)$: $|x-1|=1-x,\ |2x-4|=4-2x \Rightarrow 1-x+4-2x=3 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

Protože $\frac{2}{3} \in (-\infty,1)$, je toto číslo jediným řešením rovnice v tomto intervalu.

b) Pro $x \in \langle 1,2)$: $|x-1|=x-1,\ |2x-4|=4-2x \Rightarrow x-1+4-2x=3 \Rightarrow x=0$

Protože $0 \notin \langle 1,2)$, rovnice v tomto intervalu nemá řešení.

c) Pro $x \in \langle 2,+\infty)$: $|x-1|=x-1,\ |2x-4|=2x-4 \Rightarrow x-1+2x-4=3 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

Protože $\frac{8}{3} \in \langle 2,+\infty)$, je číslo $\frac{8}{3}$ řešením rovnice v tomto intervalu.

Množina K všech řešení dané rovnice je sjednocením množin všech jejích řešení ve všech třech intervalech: $K=\left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \phi \cup \left\{\frac{8}{3}\right\}=\left\{\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right\}$.

6. Řešte rovnice:

a) $|-x|=10$ b) $|x-1|=|1-x|$ c) $\left|\frac{3}{2}+x\right|=-2$ d) $|4+2x|=0$

7. Řešte rovnice:

a) $|x-3|=12$ b) $|x+3|=12$ c) $|3-x|=12$

8. Sestavte rovnici tvaru $|x-a|=b, a,b \in R,$ jejíž množinou všech řešení je množina $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

A) $|x|=\sqrt{2}$ B) $|x-\sqrt{2}|=0$ C) $|x+\sqrt{2}|=0$ D) $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$

9. Řešte rovnice:

a) $2x-|x-1|=1-|x|$ b) $\dfrac{|x-1|}{x+1}=2$ c) $\dfrac{1}{|x-2|}=\dfrac{3}{2}$ d) $\left|\dfrac{x+2}{1-x}\right|=\dfrac{1}{4}$

10. Řešte nerovnice:

a) $|x|<7$ b) $|x|\le 7$ c) $|x|>7$ d) $|x|\ge 7$ e) $|x|>-7$ f) $|x|\le -7$

Řešení: Nerovnici $|x|<7$ můžeme přečíst takto: Vzdálenost obrazu čísla x na číselné ose od počátku je menší než 7. Z této geometrické představy je jasné, že množiny všech řešení jednotlivých nerovnic jsou:

a) $(-7,7)$ b) $\langle -7,7\rangle$ c) $(-\infty,-7)\cup(7,+\infty)$ d) $(-\infty,-7\rangle\cup\langle 7,+\infty)$ e) R f) $\emptyset$

11. Řešte nerovnici $|x-2|\ge 5$

Řešení: Nerovnici $|x-2|\ge 5$ můžeme přečíst takto: Vzdálenost obrazu čísla x od obrazu čísla 2 na číselné ose je větší nebo rovno 5 $\Rightarrow K=(-\infty,-3\rangle\cup\langle 7,+\infty)$

12. Řešte nerovnici: $\dfrac{|2x-4|}{2-4x}\ge 1$

13. Řešte soustavu nerovnic: $-5<|2-x|<1$

14. Řešte nerovnici: $|x+1|-|x+3|\le|x-1|$

A) $K=\emptyset$ B) $K=R$ C) $K=\langle -3,-1\rangle$ D) $K=(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

15. Řešte nerovnici: $\dfrac{2}{|1-2x|}\ge\dfrac{3}{|x|}$

ŘEŠENÍ:

1. a) 6, b) 9,006

2. Řešený

3. Řešený

4. Řešený

5. Řešený

6. a) $K = \{-10,10\}$, b) $K = R$, c) $K = \phi$, d) $K = \{-2\}$

7. a) $K = \{-9,15\}$, b) $K = \{-15,9\}$, c) $|x-3| = |3-x| \Rightarrow K = \{-9,15\}$

8. A

9. a) $K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, b) $K = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, c) $K = \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$, d) $K = \left\{-3, -\frac{7}{5}\right\}$

10. Řešený

11. Řešený

12. $x \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right)$

13. $x \in (-\infty, 3)$

14. B

15. $x \in \left\langle \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right)$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a pramenů:

1. Vejsada,F., Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. 688s. ISBN 15-534-69.
2. Hudcová,M., Kubičíková,L.: Sbírka úloh z matematiky. Prometheus, Praha 2003.415s. ISBN 80-7196-165-5.
3. Kubát,J.: Sbírka úloh z matematiky.VICTORIA PUBLISHING, Praha 1993. 399s. ISBN 80-85605-27-9.
4. Kubát,J., Hrubý,D.,Pilgr,J.: Sbírka úloh pro střední školy. Prometheus, Praha 1996. 195s. ISBN 80-7196-030-6.
5. Hruška,M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení. Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012. 190s. ISBN 80-7346-149-2.