



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_11
Pořadí DUMu v sadě	11
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	1.1.2013
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR

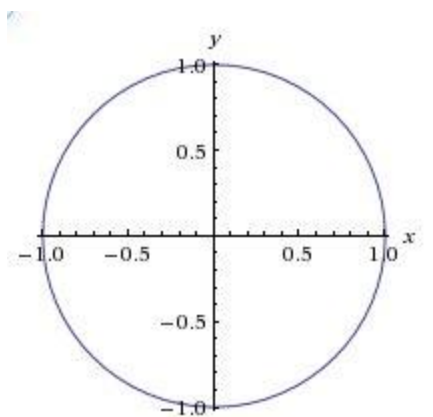


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině

Kružnice

Středová rovnice kružnice se středem $S [m, n]$ a o poloměru r je tvaru $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.



(drawn with center (0, 0) and radius 1)

Obecný tvar rovnice kružnice se středem $S[m; n]$ a o poloměru $r = \sqrt{m^2 + n^2 - p}$ je tvaru

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0,$$

kde $p = m^2 + n^2 - r^2$.

Rovnice **tečny** ke **kružnici** o rovnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v bodě $T[x_0; y_0]$ má tvar

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2.$$

Rovnice **poláry** (leží na ní tečné body dotyku vedené z bodu X_1) bodu $X_1[x_1; y_1]$ ke kružnici o rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \quad \text{má tvar}$$

$$(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2.$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

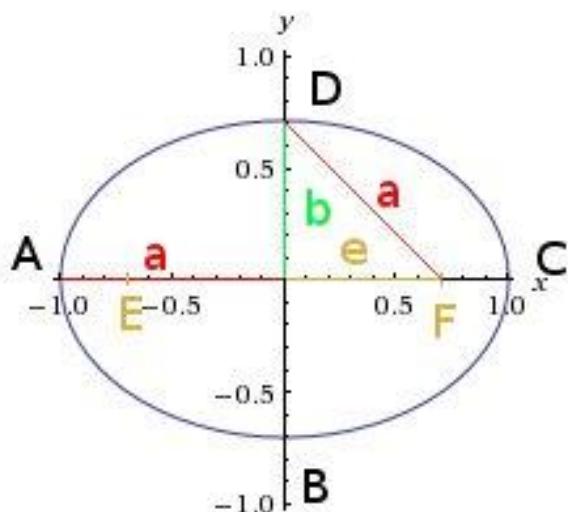


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Elipsa

V rovině jsou dány body E,F a je dáno číslo a tak, že $2a > |EF|$. **Elipsou** rozumíme množinu všech bodů X roviny, pro které platí: $|XE| + |XF| = 2a$



E,F – ohniska

a - hlavní poloosa

b - vedlejší poloosa

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ - excentricita (výstřednost)

A,C – hlavní vrcholy

B,D – vedlejší vrcholy

(drawn with center (0, 0), rotation angle 0° , eccentricity $\frac{1}{\sqrt{2}}$, semimajor axis length 1)

Rovnice elipsy se středem S[m; n] je tvaru:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Rovnice tečny k elipse v bodě T $[x_0; y_0]$ má tvar: $\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

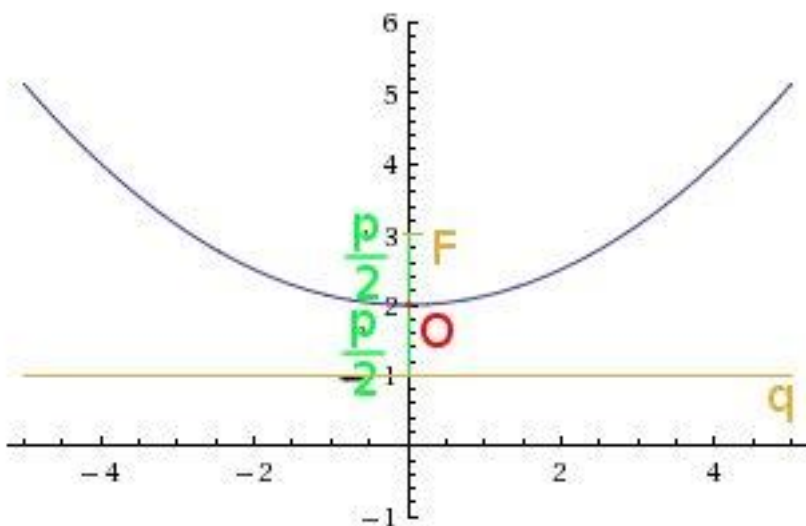


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Parabola

V rovině je dán bod F a přímka q , která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q , se nazývá **parabola**.



q – řídicí přímka

F – ohnisko

O – vrchol paraboly

$$p = 2|OF|$$

rovnice **paraboly** se středem $S[m; n]$ je tvaru:

$$\left(x - m\right)^2 = 2p\left(y - n\right), \text{ kde } p = 2|OF|, q: y = n - \frac{p}{2}$$

$$x^2 = 2py$$

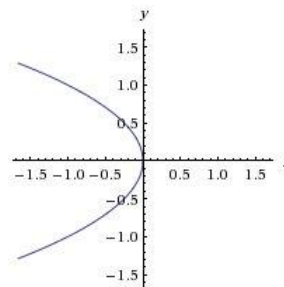
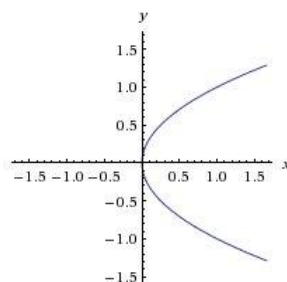
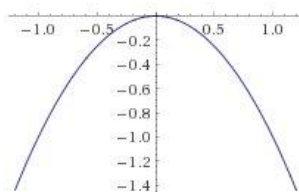
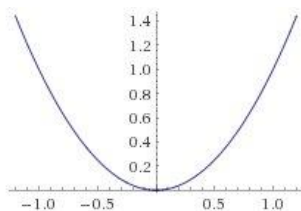
$$p > 0$$

$$p < 0$$

$$y^2 = 2px$$

$$p > 0$$

$$p < 0$$



Rovnice **tečny** k **parabole** o rovnici $\left(x - m\right)^2 = 2py$ v bodě $T[x_0; y_0]$ má tvar:

$$\left(x - m\right)\left(x_0 - m\right) = p\left(y - n\right) + p\left(y_0 - n\right)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

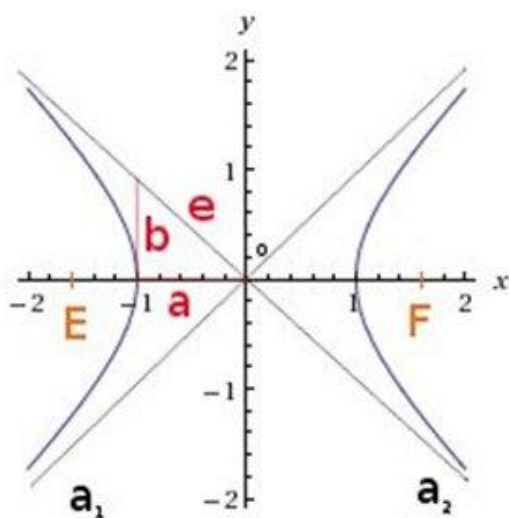


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hyperbola

V rovině jsou dány body E, F a je dáno kladné číslo a tak, že $2a < |EF|$. **Hyperbolou** rozumíme množinu všech bodů X roviny, pro které platí: $||XF| - |XE|| = 2a$.



E, F – ohniska

a - hlavní poloosa

b - vedlejší poloosa

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ - excentricita (výstřednost)

A, B – vrcholy

O – střed

a_1, a_2 - asymptoty

Rovnice hyperboly se středem $S[m; n]$ je tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice tečny k hyperbole v bodě $T[x_0; y_0]$ má tvar $\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1.$

Rovnice asymptot k hyperbole mají tvar $\frac{x}{y} - \frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{y} + \frac{y}{b} = 0.$



evropský
sociální
fond v ČR



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY:

- Napište rovnici kružnice, která má střed $S[6,7]$ a
 - prochází bodem $A[0,9]$,
 - dotýká se přímky $p: 5x - 12y - 24 = 0$,
 - dotýká se souřadnicové osy x .
- Popište a znázorněte graficky útvar určený rovnicí: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$.
- Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a s ohniskem v bodě $F[2, 0]$.
- Určete osu, vrchol, parametr a ohnisko paraboly určené rovnicí:
 - $(x+1)^2 = 4(x+3)^2$,
 - $2y^2 - 11x + 12y + 73 = 0$.
- Určete střed, směr hlavní osy, délky poloos, excentricitu, souřadnice vrcholů a ohnisek elipsy dané rovnicí $4x^2 + y^2 + 24x - 10y + 57 = 0$.
- Rozhodněte, je-li daná rovnice rovnicí elipsy, a v kladném případě určete její střed, hlavní osu a délky poloos: $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.
- Kuželosečka je dána rovnicí $k: 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
 - Zobrazte ji v kartézské soustavě souřadnic,
 - vypočtěte souřadnice ohnisek E, F , vrcholů A, B, C, D , středu S ,
 - vypočtěte hlavní a vedlejší poloosy a, b , excentricitu e ,
 - napište rovnice asymptot a_1, a_2 ,
 - napište rovnici řídící přímky p .Proveďte jen ty výpočty, které se týkají zadané kuželosečky k .



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

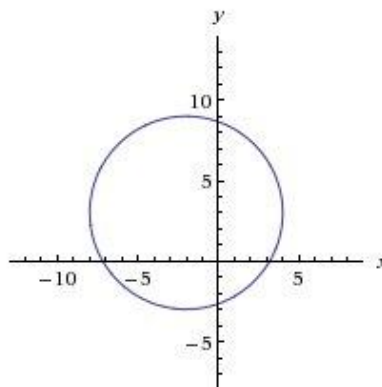


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

1. a) $\langle -6 \rangle + \langle -7 \rangle = 40$, a) $\langle -6 \rangle + \langle -7 \rangle = 36$, a) $\langle -6 \rangle + \langle -7 \rangle = 49$.
2. Kružnice se středem $S[-2, 3]$ o poloměru 6 j.



3. $y^2 = 8x$

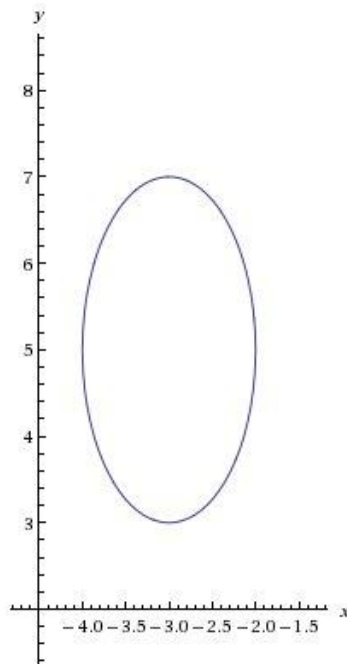
4. a) osa $y = -1$, $V[-3; -1]$, $p = 2$, $F[-1; -1]$, b) osa $y = -3$, $V[5; -3]$, $p = \frac{11}{4}$, $F[\frac{51}{8}; -3]$

5. Střed $[-3; 5]$, směr hlavní osy viz obrázek,

délky poloos $a = 1j$, $b = 2j$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

souřadnice vrcholů $[-3; 3]$, $[-3; 7]$, $[-4; 5]$, $[-2; 5]$,

ohnisek $[-3; 5 - \sqrt{3}]$, $[-3; 5 + \sqrt{3}]$.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

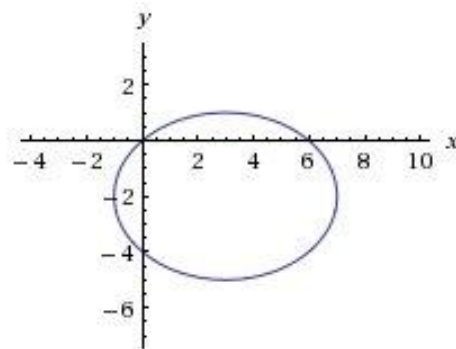


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

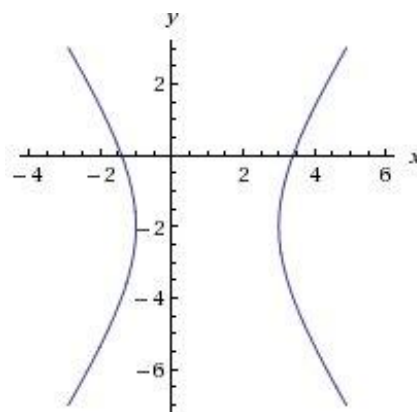
6. ellipse

foci	$((3 - \sqrt{7}, -2) \mid (3 + \sqrt{7}, -2)) \approx$ $((0.354249, -2) \mid (5.64575, -2))$
vertices	$(-1, -2) \mid (7, -2)$
center	$(3, -2)$
semimajor axis length	4
semiminor axis length	3
area	$12\pi \approx 37.6991$
perimeter	$16 E\left(\frac{7}{16}\right) \approx 22.1035$
focal parameter	$\frac{9}{\sqrt{7}} \approx 3.40168$
eccentricity	$\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0.661438$



7. hyperbola

foci	$((1 - \sqrt{13}, -2) \mid (1 + \sqrt{13}, -2)) \approx$ $((-2.60555, -2) \mid (4.60555, -2))$
vertices	$(-1, -2) \mid (3, -2)$
center	$(1, -2)$
semimajor axis length	2
semiminor axis length	3
focal parameter	$\frac{9}{\sqrt{13}} \approx 2.49615$
eccentricity	$\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1.80278$
asymptotes	$y = \frac{3x}{2} - \frac{7}{2} \mid y = -\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam literatury a pramenů

1. Vejsada, F., Talafous, F.: Sbíрка úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. ISBN 15-534-69.
2. Obrázky jsou vlastními obrázky autora, tvořené pomocí <http://www.wolframalpha.com> a grafického programu Gimp.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.