evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Posloupnosti a řady
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_12
Pořadí DUMu v sadě	12
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	21.2.2013
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

Posloupnosti a řady

Každá funkce, jejíž $D_f = N$, se nazývá **nekonečná posloupnost.**

Každá funkce, jejíž $D_f = \{n; n \le n_0, n_0 \in N\}$, kde n_0 je pevně zvolené číslo z N, se nazývá **konečná posloupnost.**

Posloupnosti $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ zapisujeme obvykle těmito způsoby:

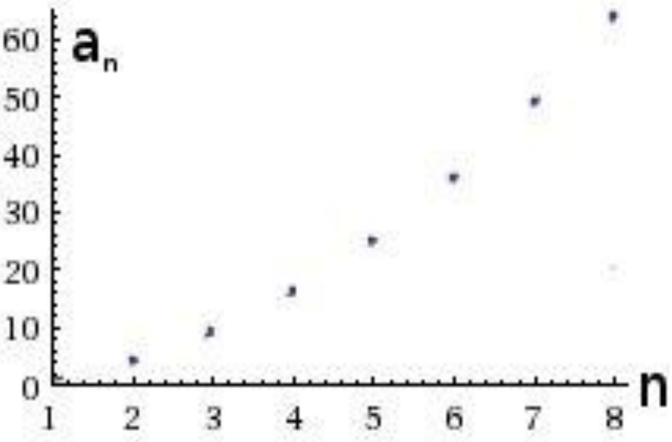
výčtem prvků,

vzorcem pro n-tý člen: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

rekurentně: je dán první člen a vzorec pro určení a_{n+1} pro každé $n \in N$.

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

Například konečnou posloupnost 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 vyjádříme vzorcem pro n-tý člen: $(n^2)_{n=1}^{\infty}$, rekurentně: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n \in N \wedge n \le 8$ a graf této posloupnosti vidíme zde:



Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická,** $\Leftrightarrow \exists d \in R : \forall n \in N : a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$a_{n+1} = a_1 + (n-1)d$,

$a_r = a_s + (r-s)d$.

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická,** $\Leftrightarrow \exists q \in R : \forall n \in N : a_{n+1} = a_n \cdot q$. Číslo q nazýváme *kvocient* geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

V geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}.$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ platí:

a) je-li $q = 1 \Rightarrow s_n = na_1$,

b) je-li $q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Vlastnosti posloupností:

Monotónnost

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí** $\Leftrightarrow$ pro $\forall r, s \in N : r < s \Rightarrow a_r < a_s$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí** $\Leftrightarrow$ pro $\forall n \in N : a_n < a_{n+1}$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající** $\Leftrightarrow$ pro $\forall r, s \in N : r < s \Rightarrow a_r > a_s$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající** $\Leftrightarrow$ pro $\forall n \in N : a_n > a_{n+1}$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **neklesající** $\Leftrightarrow$ pro $\forall r, s \in N : r < s \Rightarrow a_r \leq a_s$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **neklesající** $\Leftrightarrow$ pro $\forall n \in N : a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **nerostoucí** $\Leftrightarrow$ pro $\forall r, s \in N : r < s \Rightarrow a_r \geq a_s$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **nerostoucí** $\Leftrightarrow$ pro $\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1}$.

Omezenost

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists h \in R : \forall n \in N : a_n \leq h$.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists d \in R : \forall n \in N : a_n \geq d$.

Posloupnost se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ je shora i zdola omezená.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní** $\Leftrightarrow \exists a \in R : \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N : \forall n \in N, n \geq n_0 : \left|a_n - a\right| < \varepsilon$.
Číslo a je *limita* posloupnosti. Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Pro konvergentní posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ a $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\right)$ platí:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b,$$

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left(c \cdot a_n\right) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\leftarrow\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Každá geometrická posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, kde $\left|q\right| < 1$ je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Říkáme, že posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu plus nekonečno** (resp. mínus nekonečno) $\Leftrightarrow \forall K \in R \quad \exists n_0 \in N : \forall n \in N, n \geq n_0 : a_n > K$ (resp. $a_n < K$).

Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Nekonečnou řadou se nazývá symbol $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, který zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li posloupnost $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že nekonečná řada je **konvergentní** a příslušnou limitu nazýváme **součet** řady $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečná geometrická řada, kde $a_1 \neq 0$ je konvergentní $\Leftrightarrow$ pro kvocient q platí: $\left|q\right| < 1$. Součet této řady je $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

PŘÍKLADY:

1. Napiš prvních pět členů posloupnosti: $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.
2. Posloupnost $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.
3. Vyšetřete monotónnost posloupnosti $\left(2-n^2\right)_{n=1}^{\infty}$.
4. Dokažte, že posloupnost $\left(\frac{1}{3+2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená.
5. Dokažte MI, že pro všechna $n \in N$ platí: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.
6. Vypočítejte: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+2n-1}$.
7. Urči, zda je posloupnost konvergentní. Pokud ano, vypočti její limitu:

a) $\left(4n+3\right)_{n=1}^{\infty}$,

b) $\left(\frac{3}{2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

8. Je dána posloupnost $\left(\frac{3n-1}{2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Urči, zda je:

a) rostoucí či klesající,

b) shora, zdola omezená, omezená,

c) sestroj graf.

9. Je dána nekonečná řada: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-...$. Vypočti její součet.
10. Řešte rovnici: $2^x.\sqrt{2^x}.\sqrt[4]{2^x}.\sqrt[8]{2^x}.... = 0,25$
11. Zapište zlomkem v základním tvaru $\frac{0,4\overline{6}}{0,\overline{63}}$.
12. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Určete velikost zbývajících stran.
13. Připočteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete je.
14. Vkladatel si chce uložit do banky částku 20 000 Kč na dobu 10 let. Úroková míra činí 5%, daň z úroků je 15%, zdaňovací období je jeden rok (vždy po roce se připisují úroky). Vypočti, kolik peněz bude na účtu po 10 letech?

ŘEŠENÍ:

1. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{27}$

2. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \cdot a_n, \quad n \in N$

3. Předpokládáme, že posloupnost je klesající $\Rightarrow a_n > a_{n+1} \Rightarrow 2 - n^2 > 2 - (n+1)^2 \Rightarrow 0 > -2n - 1$
Poslední nerovnost je pro $\forall n \in N$ pravdivá $\Rightarrow$ posloupnost je klesající.

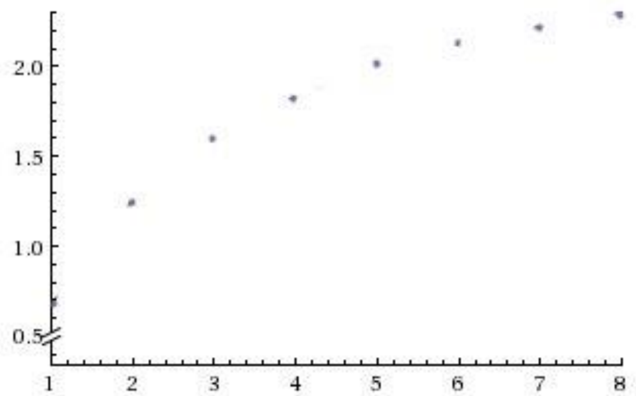
4. Stačí dokázat, že pro $\forall n \in N$ jsou $a_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{3+2n} < 1 \Rightarrow 1 < 3 + 2n \Rightarrow -1 < n$ což platí $\Rightarrow$ posloupnost $\left(\frac{1}{3+2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

5. a) Pro $n = 1$ rovnost platí, b) předpokládáme, že rovnost $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$ platí pro $\forall k < n$ c) dokážeme, že platí rovnost $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}$.
$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2}$.

6. $\lim_{n \to \infty} \frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+2n-1} = 1$

7. a) Posloupnost je divergentní, b) je konvergentní, $\lim_{n \to \infty} \frac{3}{2+n} = 0$.

8. a) rostoucí, b) omezená, c)



9. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ... = \frac{2}{3}$

10. $x = -1$

11. $\dfrac{0,4\overline{6}}{0,\overline{63}} = \dfrac{11}{15}$
12. 18 cm, 30 cm
13. 5, 10,20
14. 30324,-Kč

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam literatury a pramenů

1. Vejsada, F., Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. ISBN 15-534-69.

2. Obrázky jsou vlastními obrázky autora, tvořené pomocí http://www.wolframalpha.com a grafického programu Gimp.