INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Kombinatorika
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_13
Pořadí DUMu v sadě	13
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	15.1.2013
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

Kombinatorika

Faktoriál je definován pro $\forall n \in N$:

pro n = 0 je n! = 1,

pro n > 0 je n! = n. (n-1). (n-2)…3.2.1. Dále platí: n! = n.(n-1)!

Kombinační číslo je definováno pro $\forall n, k \in Z_0^+, k \leq n : \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Vlastnosti:

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$\binom{n}{k}$ udává **počet všech k – prvkových podmnožin n – prvkové množiny.**

Číslo 2^n (2^n je to součet všech čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku) udává počet všech podmnožin n – prvkové množiny.

Pascalův trojúhelník

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\vdots$$

Binomická věta: Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n .$$

k-tý člen **binomického rozvoje** je $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$.

Kombinatorika se zabývá vlastnostmi konečných množin, často si výsledek nelze ověřit.

Kombinatorické pravidlo součinu: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2,…, až k-tý n_k způsoby, je roven $\mathbf{n_1 . n_2 \ldots n_k}$.

Kombinatorické pravidlo součtu: Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ je roven $p_1+p_2+\ldots+p_k$.

Skupiny bez opakování:

Variace V(k;n): k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech k – členných variací z n prvků $V(k;n) = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)$

$$V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace P(n) : permutace z n prvků je uspořádaná n-tice z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet všech permutací :

$$P(n) = n!$$

Kombinace: k – členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech k-členných kombinací z n prvků

$$C(k;n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Skupiny s opakováním:

Variace s opakováním V´(k;n): k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se opakuje nejvýše k-krát.

$$V'(k;n) = n^k$$

Permutace s opakováním P´($k_1, k_2, \ldots, k_n$): permutace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$$

Kombinace s opakováním C´(k;n): k- členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k – krát.

$$C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

PŘÍKLADY:

1. Kolik čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 1 až 6, nemohou-li se opakovat?
   $A)$ 15, $B)$ 360, $C)$ 452, $D)$ 516, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

2. Kolika způsoby se může 5 mužů a 2 ženy posadit v divadle na 7 určených míst?
   $A)$ $\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}$, $B)$ $5!\cdot 2!$, $C)$ $7!$, $D)$ $5!+2!$, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

3. Kolika způsoby se může na 7 sedadel v čekárně položit 5 modrých a 2 červené podušky?

4. Kolika způsoby si může 6 lidí sednout na 13 židlí?
   $A)$ $K(6,13)$, $B)$ $V(6,13)$, $C)$ $P(7)+P(6)$, $D)$ $P(7):P(6)$

5. Kolika způsoby lze z osmi žen a čtyř mužů vybrat skupinu tvořenou třemi ženami a dvěma muži?
   $A)$ 32, $B)$ 336, $C)$ 62, $D)$ 124

6. Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet dvojčlenných kombinací o 17. Určete původní počet prvků.
   $A)$ 8, $B)$ 9, $C)$ 10, $D)$ 11, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

7. Rozhodněte, na který tvar lze upravit výraz $\dfrac{n}{(n+1)!} - \dfrac{2}{n!}$ pro celé $n \geq 0$.
   $A)$ $\dfrac{3n+2}{n+1}$, $B)$ $\dfrac{1}{n!}$, $C)$ $\dfrac{n-2}{n!\,(n+1)!}$, $D)$ $-\dfrac{n+2}{(n+1)!}$, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

8. Nalezněte řešení rovnice $\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{2} = \binom{n}{0} + \binom{7}{4}$
   $A)$ $n \in \emptyset$, $B)$ $n = \pm 6$, $C)$ $n = \sqrt{34}$, $D)$ $n = 36$, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

9. Vypočítejte: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

10. Deset mužstev hraje turnaj systémem každý s každým. Kolik se odehraje zápasů?
    $A)$ $\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}$, $B)$ $\dfrac{10!}{2!}$, $C)$ $\dfrac{10!}{8!}$, $D)$ $\dfrac{10^2}{2}$, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

11. Určete, čemu je roven výraz $\dfrac{1}{(n-4)!} - \dfrac{n}{(n-3)!}$ pro přirozené $n \geq 4$.
    $A)$ $\dfrac{3}{(n-3)!}$, $B)$ $\dfrac{3}{(n-3)!}$, $C)$ $\dfrac{-n^2+4n+1}{(n-4)!}$, $D)$ $\dfrac{-n^2+4n-1}{(n-4)!}$, $E)$ jiná odpověď než $A) - D)$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

1. B
2. C
3. 21
4. B
5. B
6. A
7. D
8. E
9. 2^n
10. A
11. B

Seznam literatury a pramenů

1. RNDr. Hruška M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení. Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012, ISBN 80-7346-149-2.

2. Obrázky jsou vlastními obrázky autora, tvořené pomocí http://www.wolframalpha.com a grafického programu Gimp.