INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Pravděpodobnost a statistika
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_14
Pořadí DUMu v sadě	14
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	3.10.2012
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRAVDĚPODOBNOST

Množinu všech možných výsledků pokusu značíme Ω. Možné výsledky ω musí být stanoveny tak, že se navzájem vylučují a jeden z nich vždy nastává.

- Každému výsledku $\omega \in \Omega$ je přiřazena jeho pravděpodobnost $p(\omega)$.
- Pravděpodobnosti $p(\omega)$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven jedné: $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.
- Podmnožiny množiny Ω se nazývají **jevy**, značí se A,B,C,… Prvkům jevu A říkáme výsledky příznivé jevu A ($\omega \in A \Leftrightarrow$ výsledek ω je příznivý jevu A).
- Pravděpodobnost jevu A značíme P(A). Definuje se jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A, tj. P(A) = $\sum_{\omega \in A} p(\omega)$.

Klasická definice pravděpodobnosti jevu A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{počet všech jevů příznivých jevu A}}{\textit{počet všech jevů}} = \frac{m}{n}$$

Příklad: Házíme 2 kostkami. Urči pravděpodobnost jevu A, že padne součet 10.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m}{V'(2,6)} = \frac{m}{36} = \frac{1}{12} \doteq 0{,}083$$

3 příznivé jevy - (4, 6), (5, 5), (6, 4) $\Rightarrow$ m = 3

Náhodný jev - jakékoli tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze rozhodnout, zda je pravdivé (po provedení pokusu).

Vlastnosti

Jev A	– náhodný (A):	$0 \le m \le n$	$0 \le P(A) \le 1$
	– jistý (Ω):	$m = n$	$P(A) = P(\Omega) = 1$
	– nemožný (Ø):	$m = 0$	P(A) = P(Ø) = 0

A…jev náhodný

A′...jev opačný k jevu A A $\cup$ A′= Ω (jev jistý), A $\cap$ A′= Ø (jev nemožný)

Jevy A, B se nazývají **nezávislé** $\Leftrightarrow$ P(A $\cap$ B) = P(A) $\cdot$ P(B)

Bernoulliho schéma

Pravděpodobnost, že při n nezávislých pokusech jev A nastane právě k – krát, je $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,

kde $k = 0,1,2...,n$ a p je pravděpodobnost jevu A.

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Elementární jev

Jev A nazýváme elementární, jestliže neexistují jevy X, Y různé od A takové, že A = X $\cup$ Y.

Pojem pravděpodobnosti

Má-li náhodný pokus m možných výsledků a jsou-li tyto výsledky stejně možné, stejně pravděpodobné, pak o každém z nich řekneme, že má pravděpodobnost $\frac{1}{m}$.

Definice pravděpodobnosti v množinovém tvaru:

1. $\forall A \in \Omega$: P(A) ≥ 0…pravděpodobnost náhodného jevu A je větší nebo rovna jedné,
2. $\forall A \in \Omega$: P(Ω) = 1 …pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné,
3. $\forall (A \cap B) = \emptyset$: P($A \cup B$) = P(A) + P(B)…pro jevy, které se navzájem vylučují, platí: pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu jejich pravděpodobností.

Vlastnosti pravděpodobnosti

1. P(A′) = 1 – P(A)…pravděpodobnost opačného jevu je doplněk pravděpodobnosti výchozího jevu do jedné,
2. P(Ø) = 0 …pravděpodobnost jevu nemožného je rovna 0,
3. $0 \leq P(A) \leq 1$,
4. A$\subset$B $\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$…jev A je podjevem jevu B,
5. A$\subset$B $\Rightarrow$P(A) $\leq$P(B),
6. P(A$\cup$B) = P(A) + P(B) – P(A$\cap$B),
7. P $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Podmíněná pravděpodobnost

$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$…pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B.

A, B nezávislé jevy $\Leftrightarrow$ P(A$\cap$B) = P(A). P(B)

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STATISTIKA

Statistický soubor = množina všech prvků, které jsou předmětem statistického zkoumání.
Znaky prvků: kvalitativní (muž a žena) a kvantitativní (liší se číselnou hodnotou).

Charakteristiky polohy – nejčastěji používané charakteristiky polohy znaku x jsou

aritmetický průměr: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

geometrický průměr: G(x,y) = $\sqrt{x.y}$, obecně $\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n}$,

harmonický průměr: H (x,y) = $\dfrac{2xy}{x+y}$, obecně $\bar{x}_H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$,

modus: hodnota x s největší četností,

medián: je prostřední hodnota znaku, jsou-li hodnoty x_1, x_2,… x_n uspořádané podle velikosti

$Med(x) = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ …je-li n liché, $Med(x) = \dfrac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)$ …je-li n sudé.

Charakteristiky variability – jak jsme si již vyložili, každou charakteristiku polohy chápeme jako číslo, kolem něhož jednotlivé hodnoty znaku kolísají. Velikost tohoto kolísání vyjadřují charakteristiky variability:

rozptyl: $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$, **směrodatná odchylka:** $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

PŘÍKLADY:

1. Studentka při zkoušce losuje 2 z 10 otázek, připravena je na 6 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že z losovaných otázek
a) bude umět obě,
b) bude umět právě jednu,
c) nebude umět žádnou,
d) bude umět aspoň jednu.

2. V bedně je 30 kuliček, z nichž tři jsou červené. Jaká je pravděpodobnost, že mezi pěti náhodně vybranými kuličkami bude nejvýše jedna červená?

3. Na výrobku se objevují tři druhy závad; závada 1. druhu s pravděpodobností 0,1; závada 2. druhu s pravděpodobností 0,05; závada 3. druhu s pravděpodobností 0,02. Jsou-li výskyty závad všech tří druhů nezávislé jevy, jaká je pravděpodobnost, že výrobek bude bez závady?

4. V osudí je 20 černých a 10 bílých koulí. Táhneme 6krát po 1 kouli, vždy s vracením tažené koule. Jaká je pravděpodobnost tažení právě 4 černých koulí?

5. Jaký jev je při hodu 3 kostkami pravděpodobnější? Součet 11 (jev A), nebo 12 (jev B)?

6. Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné číslo je dělitelné číslem 15 (jev A) **nebo** číslem 10 (jev B).

7. 10 studentů, mezi nimiž jsou Adéla a Bedřich, má ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adéla nebo Bedřich budou mezi vylosovanými?

8. Kontroloři si najali v tentýž den na tutéž cestu postupně 8 vozů taxislužby. Zaplatili tyto částky v Kč: 180, 170, 160, 190, 170, 160, 165, 165. Vypočtěte průměr a medián.

9. Ve 25 hodech kostkou padla tato čísla: 3, 6, 1, 6, 4, 3, 4, 1, 1, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 6, 4, 2, 2, 3, 1, 4, 4, 6, 6. Sestavte tabulku četností a relativních četností.

10. Hodíme dvěma kostkami, bílou a modrou. Jev A značí „na bílé kostce padne číslo větší nebo rovné 3“, jev B „na modré kostce padne číslo menší nebo rovné 3“. S jakou pravděpodobností nastává jev A, jev B, jev A i jev B současně, jev A nebo jev B?

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

1. $a)\ \frac{1}{3},\quad b)\ \frac{8}{15},\quad c)\ \frac{2}{15},\quad d)\ \frac{13}{15}$
2. $\doteq 0{,}936$
3. $\doteq 0{,}838$
4. $\frac{240}{729}$
5. $\frac{27}{216} > \frac{25}{216}$ Součet 11 je pravděpodobnější.
6. $\frac{2}{15}$
7. $\frac{8}{15}$
8. $Med(x) = 167{,}5;\quad \bar{x} = 170$
9.

ω	1	2	3	4	5	6
$n(\omega)$	5	3	4	6	0	7
$\frac{n(\omega)}{n}$	0,20	0,12	0,16	0,24	0,00	0,28

10. $P(A) = \frac{2}{3},\quad P(B) = \frac{1}{2},\quad P(A \cap B) = \frac{1}{3},\quad P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

Seznam literatury a pramenů

1. Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. JČMF, Praha 1993. ISBN 80-7015-4444-6.