



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Planimetrie
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_15
Pořadí DUMu v sadě	15
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	22.1.2013
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	<a href="mailto:mikulasek@gymjev.cz">mikulasek@gymjev.cz</a>
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský  
sociální  
fond v ČR



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Základy planimetrie

**Bod a přímka** jsou základní geometrické pojmy, bod rozděluje přímku na dvě opačné **polopřímky**.

**Úsečka** je tvořena všemi body přímky  $AB$ , které leží mezi *krajními* body  $A$  a  $B$ .

*Délka (velikost)* úsečky je vzdálenost krajních bodů. Značíme ji  $|AB|$ .

*Součet úseček* o délkách  $a$ ,  $b$  je úsečka o délce  $a + b$ .

*Rozdíl úseček* o délkách  $a$ ,  $b$  je úsečka o délce  $|a - b|$ .

Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné *poloroviny* a je jejich *hraniční přímkou*.

Dvě různé polopřímky  $VA$  a  $VB$  dělí rovinu na dva *úhly*  $AVB$ , polopřímky  $VA$  a  $VB$  se nazývají *ramena*,  $V$  je *vrchol úhlu*.

*Přímý úhel* - ramena jsou opačné polopřímky, *nulový úhel* - ramena splývají.

*Shodnost úhlů* značíme  $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$ .

*Osa úhlu* je polopřímka, která prochází vrcholem a dělí úhel na dva shodné úhly.

*Vedlejší úhly* jsou dva konvexní úhly, které mají jedno rameno společné, druhá ramena jsou opačné polopřímky.

*Vrcholové úhly* dva konvexní úhly, které mají obě ramena opačné polopřímky.

*Pravý úhel* je takový úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším.

*Ostrý úhel* je menší než pravý.

*Tupý úhel* je větší než pravý.

*Velikost úhlu*  $|\sphericalangle AVB| = \alpha$  je reálné nezáporné číslo.

*Stupňová míra šedesátinná*  $1^\circ = \frac{1}{180}$  přímého úhlu,

*oblouková míra*  $1 \text{ rad} = 57,3^\circ$ ; číselně je velikost úhlu v radiánech rovna délce kružnicového oblouku, který vytínají ramena úhlu na jednotkové kružnici se středem  $V$ .

**Konvexní** geometrický útvar – úsečka spojující libovolné dva body útvaru je celá součástí útvaru.

**Nekonvexní** geometrický útvar (konkávní) – existuje úsečka spojující dva body útvaru, která není celá součástí útvaru.

**Obrazec** je rovinný útvar ohraničený uzavřenou čarou, která je částí obrazce.

*Obvod*  $o$  obrazce je délka čáry, která ho ohraničuje.

*Obsah*  $S$  obrazce je kladné číslo, pro které platí:

1. shodné obrazce mají shodné obsahy,
2. je-li obrazec složen z několika obrazců, pak obsah je součet obsahů obrazců,
3. obsah čtverce se stranou délky  $1j$  je  $1j^2$ .



evropský  
sociální  
fond v ČR



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Konstrukční úloha** – jedná se o sestrojení geometrického útvaru daných vlastností.

Řešení obsahuje: rozbor, postup, konstrukci a diskusi.

Dělení - polohové (určeno umístěním některého objektu) a nepolohové.

Metody řešení:

- pomocí množin všech bodů dané vlastnosti,
- algebraicky – konstrukce na základě výpočtu (hledáme vztah mezi prvky),
- geometrická zobrazení.

Množina  $M$  všech bodů roviny, které mají danou vlastnost je množina bodů, pro kterou současně platí:

1. každý bod množiny  $M$  má danou vlastnost,
2. každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny  $M$ .

**Kružnice  $k(S;r)$**  je množina všech bodů, které mají od bodu  $S$  vzdálenost  $r$ .

**Osa o úsečky  $AB$**  je množina všech bodů, které mají od bodů  $A$  a  $B$  stejnou vzdálenost.

**Osa konvexního úhlu  $AVB$**  je množina všech bodů tohoto úhlu, které mají stejnou vzdálenost od přímek, na nichž leží ramena úhlu.

**Osa pásu** je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek.

**Thaletova kružnice  $k(S, r=|AB|:2)$**  je množina všech bodů, ze kterých vidíme úsečku  $AB$  pod pravým úhlem.

Množina všech bodů, z nichž vidíme úsečku  $AB$  pod úhlem  $\alpha$ , jsou dva shodné otevřené kružnicové oblouky s krajními body  $A$  a  $B$ .

Konstrukce:

**Trojúhelník** – je určen třemi prvky (strany, úhly, výšky, těžnice, kružnice opsané a vepsané).

**Čtyřúhelník** – jedná se o konstrukci trojúhelníků, na které je čtyřúhelník rozdělen úhlopříčkami (strany, úhly, úhlopříčky, úhel úhlopříček, výšky).



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Geometrická zobrazení v rovině

**Zobrazení  $Z$  v rovině** je předpis, který každému bodu  $X$  (vzoru) roviny přiřazuje právě jeden bod  $X'$  (obraz) roviny. Zapisujeme:  $Z: X \rightarrow X'$ .

Obrazem útvaru  $U$  je útvar  $U'$  - množina obrazů všech bodů útvaru  $U$ .

**Samodružný bod:**  $X = X'$ , **samodružný útvar:**  $U = U'$ , **identita** - zobrazení, kde je každý bod samodružný.

**Shodné zobrazení** (shodnost) je zobrazení, ve kterém je obrazem každé úsečky  $AB$  úsečka  $A'B'$  shodná s úsečkou  $AB$ . Existují dva druhy shodného zobrazení:

- nepřímá shodnost – dojde k převrácení útvaru,
- přímá shodnost – nedojde k převrácení útvaru.

V každém shodném zobrazení platí:

- obrazem přímky je přímka; obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky je polopřímka, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny je polorovina, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- obrazem úhlu je úhel,
- obrazem útvaru  $U$  je útvar  $U'$ .

Je dána přímka  $o$ . **Osová souměrnost s osou  $o$**  je shodné zobrazení  $O(o)$ , které přiřazuje:

- každému bodu  $X \notin o$  bod  $X'$  tak, že přímka  $XX'$  je kolmá k přímce  $o$  a střed úsečky  $XX'$  leží na přímce  $o$ ,
- každému bodu  $Y \in o$  bod  $Y' = Y$ .

Osová souměrnost je nepřímá shodnost; osa  $o$  se nazývá **osa osově souměrnosti**, která je množinou **samodružných bodů**.

Samodružné přímky jsou všechny přímky, které jsou kolmé na osu souměrnosti.

Je dán bod  $S$ . **Středová souměrnost se středem  $S$**  je shodné zobrazení  $S(S)$ , které přiřazuje:

- každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ ,
- bodu  $S$  bod  $S' = S$ .

Středová souměrnost je přímá shodnost; střed  $S$  se nazývá **střed středové souměrnosti**.

Jediný samodružný bod je střed  $S$ .

Samodružné přímky jsou všechny přímky, které procházejí středem  $S$ .

Středová souměrnost je jednoznačně určena středem  $S$  nebo dvojicí bodů  $X$  a  $X'$  - vzor a obraz.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

*Orientovaná úsečka* je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je počáteční; druhý krajní bod je koncový.

*Délka* (velikost) orientované úsečky  $AB$  je délka úsečky  $AB$ ; nulová orientovaná úsečka (bod) má velikost nula.

Je dána orientovaná úsečka  $AB$ . **Posunutí** (translace) je shodné zobrazení  $T(AB)$ , které každému bodu  $X$  přiřadí bod  $X'$  tak, že orientované úsečky  $XX'$  a  $AB$  mají stejnou délku a jsou souhlasně orientovány.

Posunutí je přímá shodnost, délka posunutí je dána velikostí úsečky  $AB$ , orientace  $AB$  určuje směr posunutí.

Posunutí nemá žádné samodružné body, přímky, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí jsou samodružné.

*Orientovaný úhel*, je úhel, u něhož je určeno, které rameno je počáteční; druhé rameno je koncové.

*Základní velikost orientovaného úhlu*  $AVB$  je velikost toho úhlu  $AVB$ , který vytvoří polopřímka  $VA$  otočením na polopřímku  $VB$  v kladném směru (proti směru hod. ručiček). Je to vždy číslo z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  resp.  $\langle 0; 360^\circ \rangle$ .

Je dán orientovaný úhel, jehož jedna velikost je  $\varphi$ , a bod  $S$ . **Otočení** (rotace) je shodné zobrazení  $R(S, \varphi)$ , které přiřazuje:

- každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ ,
- bodu  $S$  bod  $S' = S$ .

Otočení je přímá shodnost; bod  $S$  se nazývá **střed otočení**; orientovaný úhel o velikosti  $\varphi$  **úhel otočení**.

Jediný samodružný bod je střed  $S$ .

Je-li  $\varphi = \pi + 2k\pi$  - středová souměrnost, je-li  $\varphi = 2k\pi$  - identita.

Je dán libovolný bod  $X$  a dvě shodná zobrazení  $Z_1: X \rightarrow X'$ ,  $Z_2: X' \rightarrow X''$ . Pak zobrazení  $Z: X \rightarrow X''$  se nazývá **zobrazení složené** ze zobrazení  $Z_1$  a  $Z_2$  v tomto pořadí.

Skládání zobrazení není komutativní.

Složení dvou osových souměrností:

osy  $o_1$  a  $o_2$  jsou totožné, vznikne identita,

osy  $o_1$  a  $o_2$  jsou rovnoběžné: vznikne posunutí,



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

osy  $o_1$  a  $o_2$  jsou různoběžné: vznikne otočení.

Libovolné shodné zobrazení se dá složit z jedné, dvou nebo tří osových souměrností. Existují pouze tato shodná zobrazení: osová souměrnost, identita, posunutí, otočení a posunutá souměrnost (složena ze tří osových souměrností).

Je dán bod  $S$  a reálné číslo  $k \neq 0$ . **Stejnolehlost (homotetie) se středem  $S$  a koeficientem  $k$**  je zobrazení  $H(S,k)$ , které přiřazuje:

- $\forall X \neq S$  bod  $X'$  tak, že platí:  $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ ,  
 $k > 0$   $X'$  leží na polopřímce  $SX$ ,  
 $k < 0$   $X'$  leží na opačné polopřímce k  $SX$ ,
- bodu  $S$  bod  $S' = S$ .

Samodružným bodem je střed, samodružné přímky ty, které procházejí středem stejnolehlosti.

### Stejnolehlost kružnic

Obrazem kružnice  $k(O,r)$  ve stejnolehlosti  $H(S,k)$  je kružnice  $k'(O', |k| \cdot r)$ , kde  $O'$  je obrazem bodu  $O$ .

Jsou-li dány dvě kružnice s různými poloměry, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první na druhou.



evropský  
sociální  
fond v ČR



## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### PŘÍKLADY:

- Zeměměřič zjistil, že na louce je vyznačen bod  $B$  12 metrů severně od bodu  $A$  a bod  $C$  10 metrů severozápadně od bodu  $B$ . Určete vzdálenost bodu  $A$  od bodu  $C$  s přesností na desetiny metru.
- Rozhodněte, která hodnota nemůže být odchylkou dvou přímek.  
A)  $128^\circ$ ,      B)  $90^\circ$ ,      C)  $\frac{1^\circ}{2}$ ,      D)  $0^\circ$
- Určete délku těžnice  $t_c$  v pravouhlém trojúhelníku s odvěsnami  $a=3\text{cm}$ ,  $b=4\text{cm}$ .
- rozhodněte, co platí v každém trojúhelníku.  
A)  $v_{\bar{a}} < t_a$ ,      B)  $v_{\bar{a}} \geq t_a$ ,      C)  $v_{\bar{a}} \leq t_a$ ,      D)  $v_{\bar{a}} > t_a$
- V rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$  má vnější úhel u vrcholu  $A$  velikost  $130^\circ$ . Určete velikost úhlu u vrcholu  $C$ .
- V rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  se stranou 12 cm určete vzdálenost těžiště od strany  $AB$ .  
A)  $2\sqrt{3}$ ,      B)  $3\sqrt{3}$ ,      C)  $4\sqrt{3}$ ,      D)  $6\sqrt{3}$
- V trojúhelníku o stranách 9,6 cm, 9,6 cm a 16 cm vypočítejte poloměr kružnice opsané.
- Rozhodněte, který čtyřúhelník nemá kolmé úhlopříčky.  
A) kosočtverec      B) deltoid      C) obdélník      D) čtverec
- Je dán obdélník o stranách 5 cm a 10 cm. Určete délku delší strany podobného obdélníku s třikrát větším obsahem.
- V pravidelném pětiúhelníku  $ABCDE$  se středem  $S$  a o straně 5 cm vypočítejte:
  - velikost vnitřních úhlů,
  - poloměr kružnice opsané
  - velikost úhlu  $ASC$ ,
  - obsah trojúhelníku  $ASC$ .
- Vypočítejte obsah kruhové úseče se středovým úhlem  $90^\circ$  a poloměrem 10 cm.
- Do kružnice o poloměru 20 cm je vepsán rovnoramenný trojúhelník. Vypočítejte délku jeho strany.
- Vypočítejte obsah mezikruží s poloměry 10 a 15 cm.
- Určete kolik prvků z množiny  $\{O, I, H, T, F, C\}$  je:
  - středově souměrných
  - osově souměrných
- Zobrazíme-li graf funkce  $y = \sin x$  v osové souměrnosti podle osy  $x$ , získáte graf funkce:  
A)  $y = \cos x$ ,      B)  $y = |\cos x|$ ,      C)  $y = -\sin x$ ,      D)  $y = \sin|x|$
- Určete funkci, která má graf středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.
- A)  $y = x - 2$ ,      B)  $y = x^2 - 4x$ ,      C)  $y = 3x^{-1}$ ,      D)  $y = e^x$
- Nalezněte souřadnice bodu, který vzniknul zobrazením bodu  $[-3,7]$  v osové souměrnosti podle osy I. a III. kvadrantu.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### ŘEŠENÍ:

1. 20,3 metru
2. A
3.  $t_c = 2,5\text{cm}$
4. C
5.  $80^\circ$
6. A
7. 8,7 cm
8. C
9.  $5\sqrt{3}\text{cm}$
10. a)  $108^\circ$ , b) 4,25 cm, c)  $144^\circ$ , d)  $5,32\text{ cm}^2$
11.  $28,5\text{ cm}^2$
12.  $5\sqrt{3}\text{cm}$
13.  $125\pi\text{ cm}^2 \doteq 393\text{ cm}^2$ .
14. a) 3, b) 5
15. C
16. C
17. [7,-3]





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### Seznam literatury a pramenů

RNDr. Hruška M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení.  
Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012, ISBN 80-7346-149-2.

**Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.**