evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Stereometrie
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_16
Pořadí DUMu v sadě	16
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	7. 3. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	4.
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STEREOMETRIE

Stereometrie je část geometrie, která se zabývá studiem prostorových útvarů.
Základní geometrické útvary: **bod, přímka, rovina.**
Volné rovnoběžné promítání je zobrazení, které používáme k zobrazení prostorových útvarů.

- Rovnoběžné: dvojice BB´ ║ CC´, B´je je rovnoběžný průmět bodu B.
- Směr promítání: dán dvojicí BB´.
- Průmětna: rovina, do které útvary zobrazujeme.
- Pohledy: nadhled (levý, pravý), podhled (levý, pravý).

Shodné a rovnoběžné úsečky, které nejsou ║ BB´se zobrazí na shodné a rovnoběžné úsečky. Je-li AA´ ║ BB´, pak se zobrazí na bod.
Útvar, který leží v průmětně nebo v rovině s ní rovnoběžné (**v průčelné rovině)** se promítne do útvaru s ním shodným.
Zobrazení těles: aspoň jednu hranu do průmětny nebo do průčelné roviny, úsečky kolmé na průmětnu se zobrazí do úseček, které svírají s obrazem vodorovných úseček úhel 45°.
Bod leží v rovině, jestliže leží na nějaké přímce roviny. Přímka leží v rovině, jestliže leží v rovině 2 různé body přímky.
Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ je jednoznačně určena 2 různými body.
Rovina je jednoznačně určena:

- 3 body, které neleží na téže přímce,
- přímkou a bodem, který na ní neleží,
- 2 různoběžnými přímkami,
- 2 různými rovnoběžnými přímkami.

Rovina rozděluje prostor na dva opačné poloprostory, je jejich hraniční rovinou.
Konvexní geometrický útvar – úsečka spojující libovolné dva body útvaru je součástí útvaru.
Vzájemná poloha:

a) bodu a přímky: leží, neleží;
b) bodu a roviny: leží, neleží;
c) dvou přímek: různoběžné, rovnoběžné, totožné, mimoběžné (nemají společný bod a neleží v téže rovině);

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příčka mimoběžek - přímka, která protíná obě přímky.

d) přímky a roviny: různoběžná, rovnoběžná, leží v rovině;
e) dvou rovin: různoběžné (**průsečnice,** tvoří **klín**), rovnoběžné (tvoří **vrstvu**), totožné;
f) tří rovin: každé dvě rovnoběžné, dvě rovnoběžné a třetí je protíná v p‖q, každé dvě různoběžné (průsečnice splynou nebo jsou rovnoběžné nebo všechny prochází jedním společným bodem).

Je-li p $\parallel \rho$ a p $\parallel \sigma$, pak je p ‖ s jejich průsečnicí.

Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny – rovinný útvar, jehož hranice je průnik tělesa a roviny řezu.

Konstrukce řezů:

- Leží-li dva různé body A,B v rovině řezu, pak tam leží celá $\leftrightarrow AB$.
- Dvě $\rho \parallel \sigma$ roviny protíná třetí rovina v rovnoběžných přímkách.
- Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají–li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.

Průnik přímky s rovinou určíme pomocí roviny, kterou proložíme přímkou a je různoběžná s rovinou. Průnik průsečnic je hledaný bod.

Průnik přímky s tělesem – přímkou proložíme libovolnou rovinu, určíme řez tělesa touto rovinou a průnik přímky s řezem tělesa je současně průnik přímky s tělesem.

Metrické vztahy - početně určujeme vzdálenost, odchylku, délku.

Odchylka přímek $\varphi = |\sphericalangle\, pq|$

a) různoběžných – je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky svírají;
b) rovnoběžných – je 0°;
c) mimoběžných – je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Kolmost přímek a rovin

a) dvě přímky – dvě přímky jsou kolmé $\Leftrightarrow$ jejich odchylka je 90°;
b) přímka a rovina $\Leftrightarrow$ přímka je kolmá ke všem přímkám roviny;
   Přímka je **kolmice**, průsečík je **pata** kolmice.
   Je-li přímka kolmá ke dvěma přímkám roviny, pak je $p \perp \rho$.
c) dvě roviny $\Leftrightarrow$ jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině,
   přímkou $p \nparallel \rho$ lze vést rovinu $\alpha \perp \rho$, průsečnice je **pravoúhlý průmět p do** ρ**.**

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Odchylka přímek a rovin:

a) dvě roviny – je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je kolmá k oběma z nich;
b) přímka a rovina – odchylka je velikost nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky roviny; jedná se o odchylku přímky od jejího pravoúhlého průmětu do této roviny.

Vzdálenosti bodů, přímek a rovin:

a) dvou bodů $|AB|$ - je délka úsečky AB;
b) bodu od přímky $|Ap|$ - je vzdálenost bodu od jeho pravoúhlého průmětu na přímce;
c) bodu od roviny $|A\rho|$ - je vzdálenost bodu od jeho pravoúhlého průmětu do roviny;
d) dvou rovnoběžných přímek – je vzdálenost lib. bodu jedné přímky od druhé přímky;
e) dvou rovnoběžných rovin – je vzdálenost lib. bodu jedné roviny od druhé roviny;
f) přímky rovnoběžné s rovinou – je vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny;
g) mimoběžek – je velikost úsečky $|PQ|$, kde P a Q jsou průsečíky mimoběžek s příčkou k nim kolmou.

Geometrické těleso je prostorově omezený útvar, hranicí (povrchem) je uzavřená plocha.
Mnohostěn (n-stěn) – je každé těleso, jehož hranice je sjednocením n-mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině.
Stěny – mnohoúhelníky.
Hrany – strany mnohoúhelníků.
Vrcholy – vrcholy mnohoúhelníků.
Stěnová úhlopříčka – úsečka, která spojuje dva sousední vrcholy ležící v jedné stěně.
Tělesová úhlopříčka – úsečka, která spojuje dva nesousední vrcholy neležící v jedné stěně.
Konvexní mnohostěn – průnik konečného počtu poloprostorů.
Eulerova věta: s+v=h+2, s- počet stěn, v-počet vrcholů, h-počet hran.
Síť mnohostěnu – zakreslení všech stěn do jedné roviny.
Pravidelný mnohostěn (**platónská tělesa)** – má shodné stěny pravidelné n-úhelníky.
Tetraedr – pravidelný čtyřstěn, stěnami trojúhelníky;
Oktaedr – pravidelný osmistěn, stěnami trojúhelníky;
Ikosaedr – pravidelný dvacetistěn, stěnami trojúhelníky;
Hexaedr – pravidelný šestistěn, stěnami čtyřúhelníky;
Dodekaedr – pravidelný dvanáctistěn, stěnami pětiúhelníky;
N-boký hranol – průnik n-bokého hran. prostoru a vrstvy s hraničními rovinami, které nejsou směrové.

Pojmy: výška, podstavy, boční stěny, vrcholy, plášť, boční hrany, podstavné hrany, stěnová výška, tělesové úhlopříčky.

Kolmý hranol – boční hrany jsou kolmé k podstavným hranám.

Kosý hranol – boční hrany nejsou kolmé k podstavným hranám.

Rovnoběžnostěn – má rovnoběžné podstavy i boční stěny – kvádr, krychle, klenec (stěny kosočtverce).

N-boký jehlan - průnik n-bokého jehlanového prostoru a vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s tímto prostorem společný bod – vrchol.

Pojmy: výška, vrchol, podstava, vrcholy podstavy, hlavní vrchol, boční stěny, plášť, boční hrany, podstavné hrany, stěnová výška.

Pravidelný n-boký jehlan – podstavou je pravidelný n-úhelník, průmět hlavního vrcholu do podstavy je střed podstavy.

Čtyřstěn – těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami;

Pravidelný čtyřstěn – stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky;
Komolý jehlan – část jehlanu obsahující podstavu, která zbude po uříznutí části jehlanu obsahující hlavní vrchol rovinou rovnoběžnou s podstavou, má dvě podstavy, boční stěny jsou lichoběžníky.
Rotační těleso je těleso, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem dané přímky – osy.
Koule, kužel, anuloid, válec, rovnostranný válec (os. řezem je čtverec), rovnostranný kužel (os. řezem je rovnostranný trojúhelník).
Rotační kužel – vznikne rotací obdélníku kolem přímky, která obsahuje jednu jeho stranu.
Kulový vrchlík – část kulové plochy omezená její libovolnou kružnicí.
Kulová úseč – při protnutí koule rovinou vzniknou dvě kulové úseče.
Kulová výseč – sjednocení kulové úseče a rotačního kužele se stejnou podstavou.
Kulový pás – průnik kulové plochy a vrstvy s hraničními rovinami, jejichž vzdálenost je menší než poloměr koule.
Objem tělesa – je kladné reálné číslo přiřazené tělesu takto:

1. Shodná tělesa mají shodné objemy;

2. Je-li těleso složeno z několika neprotínajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles;
3. Objem krychle o délce hrany 1j je $1j^3$.

Cavalieriho princip – jestli pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem. Příklad mincí.

Povrch tělesa - povrchem rozumíme obsah hranice.

Hranol	$V = S_p \,.\, v$	$S = 2S_p + S_{pl}$
Krychle	$V = a^3$	$S = 6a^2$
Kvádr	$V = abc$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$
Jehlan	$V = \frac{1}{3} S_p . v$	$S = S_p + S_{pl}$
Pravidelný	$S_{pl} = n\frac{1}{2}a.t$, a – délka podstavné hrany, t – tělesová výška	
Komolý	$V = \frac{1}{3} v\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$	$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$
Válec	$V = \pi r^2 v$	$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$
Kužel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$	$S = 2\pi r^2 + \pi r s$, s – délka strany
Komolý	$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$	$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s\left(r_1 + r_2\right)$
Koule	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$
Úseč	$V = \pi r_1^2 \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$	$S = 2\pi r v$
Vrstva	$V = \pi r_1^2 \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$	

PŘÍKLADY:

1. Určete výpočtem odchylku φ tělesové úhlopříčky krychle a roviny stěny.
Řešení:
Odchylka přímky a roviny je odchylka přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny $\Rightarrow tg\varphi = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi \doteq 35°16'$.

2. Kvádr ABCDEFGH má rozměry $|AB| = a = 4cm, |AD| = b = 3cm, |AE| = c = 6cm.$
Vypočtěte odchylku přímky BG a roviny BCH.
Řešení:
$tg\varphi = \dfrac{|HG|}{|BG|} = \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \doteq 30°48', |BG| = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$

3. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočtěte vzdálenost bodu G od přímky BD.
Řešení:
Vzdálenost bodu od přímky je vzdálenost tohoto bodu od jeho pravoúhlého průmětu na tuto přímku $\Rightarrow |GG'| = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

4. Určete, kolik hran má hranol s osmi stěnami.

A) 18 B) 20 C) 24 D) 32

5. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočtěte odchylku přímek BM a DM, kde bod M je střed hrany BC.

6. V krychli ABCDEFGH určete odchylku rovin:
a) ABC, BDH; b) ABE, ABH; c) ACG, BCH.

7. Pravidelný trojboký hranol má všechny hrany stejně dlouhé. Jeho objem je $V = 3{,}46 dm^3$.
Vypočtěte obsah pláště hranolu.

A) $10dm^2$ B) $12dm^2$ C) $14dm^2$ D) $16dm^2$

8. Vypočtěte objem a povrch krychle, která má tělesovou úhlopříčku $u = 5\sqrt{3}\,j$.

9. Krabice tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu má mít objem 4 litry. Vypočtěte jeho rozměry, má-li být jeho výška dvakrát menší než délka podstavné hrany. Vypočtěte povrch krabice bez víka.

A) $2dm, 1dm, 12dm^2$ B) $4dm, 2dm, 16dm^2$ C) $6dm, 3dm, 24dm^2$ D) $7dm, 3{,}5dm, 27dm^2$

10. Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li délka boční hrany $a = 1dm$ a její odchylka od roviny podstavy je 60°.

11. Kvádr má hranu $a = 9cm$, tělesovou úhlopříčku $u = 17cm$ a objem $V = 864cm^3$. Určete rozměry kvádru.

A) $4cm, 6cm$ B) $6cm, 10cm$ C) $8cm, 12cm$ D) $10cm, 12cm$

12. Pravidelný čtyřboký jehlan má délku podstavné hrany $a = 4\sqrt{2}dm$ a délku boční hrany $h = 5dm$. Vypočtěte jeho objem.

A) $26dm^3$ B) $28dm^3$ C) $30dm^3$ D) $32dm^3$

13. Nad každou stěnou krychle s délkou hrany a je sestrojen pravidelný čtyřboký jehlan tak, že jeho hlavní vrchol leží vně krychle a jeho výška v je rovna polovině délky hrany a. Vypočtěte objem takto vytvořeného tělesa.

A) $2a^3$ B) $3a^3$ C) $4a^3$ D) $5a^3$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

4. A

5. $\varphi = 63{,}4°$

6. a) 90°; b) 45°; c) 60°.

7. B

8. $V = 125\, j^3, S = 150\, j^2$

9. A

10. $V = 0{,}144 dm^3$

11. C

12. D

13. A

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a pramenů:

1. Vejsada,F., Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. 688s. ISBN 15-534-69.

2. Hudcová,M., Kubičíková,L.: Sbírka úloh z matematiky. Prometheus, Praha 2003.415s. ISBN 80-7196-165-5.

3. Kubát,J.: Sbírka úloh z matematiky.VICTORIA PUBLISHING, Praha 1993. 399s. ISBN 80-85605-27-9.

4. Kubát,J., Hrubý,D.,Pilgr,J.: Sbírka úloh pro střední školy. Prometheus, Praha 1996. 195s. ISBN 80-7196-030-6.

5. Hruška,M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení. Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012. 190s. ISBN 80-7346-149-2.