



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Analytická geometrie lineárních útvarů
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_18
Pořadí DUMu v sadě	18
Vedoucí skupiny/sady	Petr Mikulášek
Datum vytvoření	21.2.2013
Jméno autora	Petr Mikulášek
e-mailový kontakt na autora	mikulasek@gymjev.cz
Ročník studia	4
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Analytická geometrie lineárních útvarů

a) Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

Rovnice $X = A + t\mathbf{u}$, $t \in R$ se nazývá parametrická rovnice přímky určené bodem A , směrovým vektorem $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a parametrem t . Pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$ rovnice vyjadřuje úsečku AB , pro $t \in \mathbb{R}$ rovnice vyjadřuje polopřímku AB .

Rovnice $ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in R$ a aspoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky, $\mathbf{n} = \langle a; b \rangle$ se nazývá normálový vektor přímky.

Rovnice $y = kx + q$, kde $k, q \in R$ se nazývá směrnice tvar přímky. Číslo k se nazývá směrnice a platí: $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u_2}{u_1}$, kde φ je odchylka přímky od kladné poloosy x , u_1, u_2 jsou souřadnice

směrového vektoru \mathbf{u} . Přímka kolmá k přímce o směrnici k má směrnici $k' = -\frac{1}{k}$.

Rovnice $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ se nazývá úsekový tvar rovnice přímky. Úsekový tvar lze použít tehdy, když přímka není rovnoběžná s žádnou osou a neprochází počátkem.

Vzdálenost d bodu $P \in \mathbb{R}^2$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odchylka přímek p, q se směrovými vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} je číslo $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí $\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru

Rovnice $X = A + t\mathbf{u}$, $t \in R$ se nazývá parametrická rovnice přímky určené bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u} = \langle u_1; u_2; u_3 \rangle$ a parametrem t . Pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$ rovnice vyjadřuje úsečku AB , pro $t \in \langle 0; +\infty \rangle$ rovnice vyjadřuje polopřímku AB .

Rovnice $X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, $t, s \in R$ se nazývá parametrická rovnice roviny určené bodem A , směrovými vektory $\mathbf{u} = \langle u_1; u_2; u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$ kde vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou lineárně nezávislé.

Rovnice $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in R$ kde aspoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá obecná rovnice roviny, $\mathbf{n} = \langle a; b; c \rangle$ se nazývá normálový vektor.

Vzdálenost bodu P od přímky $p \langle A, \mathbf{u} \rangle$ určíme jedním z následujících způsobů:

- z rovnice $\langle X - P, \mathbf{u} \rangle = 0$, kde X je libovolný bod přímky p ,
- pomocí průsečíku roviny kolmé k přímce p , která prochází bodem P .

Vzdálenost d bodu $P[p_1; p_2; p_3]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ se vypočítá dle vzorce

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Odchylka přímek p, q se směrovými vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} je číslo $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí $\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$.

Odchylka přímky p a roviny ρ určíme jedním z následujících způsobů:

- pomocí roviny σ kolmé k rovině ρ a obsahující přímku p . Pak průsečnice rovin s přímkou p určují odchylku přímky p a roviny ρ .
- pomocí normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky. Odchylka φ přímky a roviny se vypočítá podle vzorce $\varphi = \frac{\pi}{2} - \phi$, kde ϕ je úhel normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky.

Odchylka dvou rovin je dána odchylkou normálových vektorů.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍKLADY:

- Sečtěte vektory $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ a $\mathbf{w} = -3\mathbf{u}$.
A) $5\mathbf{u}$, B) $-5\mathbf{u}$, C) $-\mathbf{u}$, D) \mathbf{u}
- Sečtěte vektory $\mathbf{u} = \langle -3; 0 \rangle$, $\mathbf{v} = (1; 7; -5)$.
- Velikost vektoru \mathbf{u} je $2\sqrt{3}$. Určete velikost vektoru a) $-5\mathbf{u}$, b) $\frac{1}{4}\mathbf{u}$, c) $-0,3\mathbf{u}$.
- Určete souřadnice středu úsečky AB , jestliže $A = \langle -9; 1 \rangle$, $B = \langle 7; -5 \rangle$.
- Určete souřadnice bodu B úsečky AB , která je určena bodem $A = \langle -9; 1 \rangle$ a vektorem $\mathbf{u} = \langle -3; 0 \rangle$.
- Vypočítejte skalární součin vektorů $\mathbf{u} = \langle -3; 0 \rangle$, $\mathbf{v} = (1; 7; -5)$.
- Vypočítejte vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = \langle -3; 0 \rangle$, $\mathbf{v} = (1; 7; -5)$.
- Vypočítejte úhel vektorů $\mathbf{u} = \langle -3; 0 \rangle$, $\mathbf{v} = (1; 7; -5)$.
- Nalezněte vektor kolmý k vektoru $\mathbf{u} = \langle -3 \rangle$.
- Rozhodněte, který z vektorů není kolmý k vektoru $\mathbf{u} = \langle -3 \rangle$.
A) $\langle 1; -3 \rangle$, B) $\langle 3; -1 \rangle$, C) $\left\langle -1; -\frac{1}{3} \right\rangle$, D) $\langle 6; 2 \rangle$
- Urči odchylku rovin $\rho: x - y + z + 2 = 0$, $\sigma: x - 2y - 3z + 1 = 0$ pomocí normálových vektorů.
- V prostoru je dána přímka $p: x = 1 + t, y = -2t, z = -1 - t, t \in \mathbb{R}$ a rovina $\rho: x + 3y + z - 1 = 0$. Urči průsečík přímky p s rovinou ρ .
- Určete vzájemnou polohu přímek a, b . Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.
a) $a: 2x - y + 3 = 0, b: x + y - 6 = 0$,
b) $a: x - 3y - 1 = 0, b: -2x + 6y + 5 = 0$,
c) $a: x + y - 2 = 0, b: 2x + 2y - 4 = 0$.
- Určete souřadnice paty kolmice vedené bodem $M [2; -5]$ k přímce $p: x - 7y + 13 = 0$.
- Určete odchylku přímek p, q , je-li:
a) $p: 2x - y + 1 = 0, q: 3x + y + 1 = 0$,
b) $p: x - 2y + 13 = 0, q: \Leftrightarrow AB$, kde $A [0; -1], B [4; 1]$,
c) $p: x = 1 - 3t, y = 2 + t; t \in \mathbb{R}; q: x = 3 - s, y = 1 - 3s; s \in \mathbb{R}$.
- Určete vzdálenost bodu M od přímky p , je-li:
 $M [2; 4]; p: x = 6 + 3t, y = -8 - 4t; t \in \mathbb{R}$.
- Na přímce $p: 4x - 12y - 2 = 0$ najděte body, které mají od přímky $q: 5x + 12y + 5 = 0$ vzdálenost 3.
- Napište obecnou rovnici roviny, která je rovnoběžná s rovinou $\sigma: 2x - y + z - 1 = 0$ a prochází bodem $A [-3; 1; 2]$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

19. Určete souřadnice paty P kolmice vedené bodem $A[2;0;3]$ k rovině $\rho: x - 3y + 5z + 18 = 0$.
20. Určete vzdálenost bodu $M [-7;0;-1]$ od roviny $\rho: 4x + 12y - 3z - 1 = 0$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ:

1. C)

2. $\langle 4; -5 \rangle$

3. a) $10\sqrt{3}$, b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, c) $0,6\sqrt{3}$

4. $S = \left[\frac{5}{2}; -1; -2 \right]$

5. $B = \langle -12; 1 \rangle$

6. -19

7. $\langle 5; 10; 17 \rangle$

8. $127^\circ 28' 48,66''$

9. $\langle 2 \rangle$

10. A)

11. 90°

12. $\left[\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6} \right]$

13.

a) Různoběžné, průsečík $\langle 5 \rangle$,

b) rovnoběžné různé,

c) rovnoběžné totožné.

14. $\langle 2 \rangle$

15.

a) 45° ,

b) 90° ,

c) 90° .

16. 4

17. $\left[5; \frac{3}{2} \right]$

18. $2x - y + z + 5 = 0$

19. $[1, 3, -2]$

20. 2



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam literatury a pramenů

RNDr. Hruška M.: Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení.
Nakladatelství Agentura Rubiko, s. r. o., Olomouc 2012, ISBN 80-7346-149-2.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.