evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Komplexní čísla
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_15_19
Pořadí DUMu v sadě	19
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	4. 3. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	4.
Předmět nebo tematická oblast	Matematický seminář
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. Inovace: využití ICT, mediální techniky.

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexní číslo je výraz $a+bi$, kde $a,b \in R, i$ je číslo, že $i^2 = -1$;

a - reálná část

b - imaginární část

i - imaginární jednotka

sčítání: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

násobení: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

rovnost: $(a+bi)=(c+di) \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$

podíl: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2}$

Pro lib. komplexní čísla z,z_1,z_2, a všechna přirozená čísla m,n platí:

$z^m . z^n = z^{m+n}$; $\quad (z_1 . z_2)^n = z_1^n . z_2^n$; $\quad (z^m)^n = z^{mn}$;

čísla komplexně sdružená $z=(a+bi)$ a $\bar{z}=(a-bi)$

$z.\bar{z} \in R_0^+, z.\bar{z}=0 \Leftrightarrow z=0$

$\overline{-z} = -\bar{z}, \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2,$

absolutní hodnota komplexního čísla $z=a+bi$ je:

$|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$, $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Gaussova rovina je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel.
Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku.

Goniometrický tvar komplexního čísla $z \neq 0$ je vyjádření $z = |z|.(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

φ je argument, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru:

$$z_1.z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1 z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Moivreova věta : Pro každé $n \in N$ a lib. $\varphi \in R$ platí: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$$\Rightarrow \left[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Binomická rovnice $x^n - |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 0$ má v oboru C právě n různých kořenů

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,..,n-1$$

Tyto kořeny pro n>2 leží v Gaussově rovině ve vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice.

PŘÍKLADY:

1. Jsou dána komplexní čísla: $a = 3 - 2i, b = 4 - i.$

a) Ve tvaru algebraickém vyjádřete $\frac{a}{b}$;

b) Vypočtěte $|a|;|b|$;

2. Vypočtěte: $\frac{(-1)^3}{(-i)(-2i)}.$

3. Vypočtěte: $a = (-3i)^2 \cdot i^5 + \frac{13-26i}{3-2i} - (+i)(-i).$

4. Řešte v C: $z(+i) = \bar{z}i - 2 + i$.

5. Vyjádřete v algebraickém tvaru: a) $z = 5\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

b) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Vyjádřete v goniometrickém tvaru: a) $z = -3$; b) $z = -2\sqrt{3} + 2i.$

7. S komplexními čísly $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ proveďte příslušné operace a výsledek zapište v algebraickém tvaru: $z_1 \cdot z_2; \frac{z_1}{z_2}; z_1{}^6; z_2{}^{15}$.

8. Užitím Moivreovy věty vypočtěte komplexní mocninu a výsledek zapište v algebraickém tvaru: $z = (\sqrt{3} + i)^8.$

9. V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

a) $x^2 + 9 = 0$; b) $x^2 + 2x + 2 = 0$; c) $3x^2 - 7x + 5 = 0$.

10. V C řešte následující rovnici jednak jako kvadratickou, jednak jako binomickou:

$x^2 - 2x + 2 = 0$

ŘEŠENÍ:

1. $a)\frac{14}{17}-\frac{5}{17}i, \quad b)|a|=\sqrt{13}, \quad |b|=\sqrt{17}.$

2. $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$

3. $17-9i$

4. $(a+bi)(1+i)=(a-bi)i-2+i$

$a+bi+ai-b=ai+b-2+i$

$a-b=b-2 \Rightarrow a-1=-1 \Rightarrow a=0$

$a+b=a+1 \Rightarrow b=1$

$z=i$

5. $a)-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{15}{2}i$**;** $b)3+3i.$

6. $a)z=-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$**;** $b)z=-2\sqrt{3}+2i=4\cdot\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$**.**

7. $z_1\cdot z_2=2\left(\cos\frac{2\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi+\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i$

$\frac{z_1}{z_2}=2\left(\cos\frac{\pi-2\pi}{6}+i\sin\frac{\pi-2\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$

$z_1^6=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^6$

$z_2^{15}=\cos 5\pi+i\sin 5\pi=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

8. $z=(-\sqrt{3}+i)^8=\left[2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right]^8=2^8\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^8=2^8\left(\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi\right)=$

$=2^8\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2^8\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

9. $a)\ \{-3i,3i\};\ b)\ \{-1-i,-1+i\};\ c)\left\{\frac{7-i\sqrt{11}}{6},\frac{7+i\sqrt{11}}{6}\right\}$

10. $\{1-i,1+i\}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a pramenů:

1. Vejsada,F., Talafous, F.: Sbírka úloh z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1969. 688s. ISBN 15-534-69.

2. Hudcová,M., Kubičíková,L.: Sbírka úloh z matematiky. Prometheus, Praha 2003.415s. ISBN 80-7196-165-5.

3. Kubát,J.: Sbírka úloh z matematiky.VICTORIA PUBLISHING, Praha 1993. 399s. ISBN 80-85605-27-9.

4. Kubát,J., Hrubý,D.,Pilgr,J.: Sbírka úloh pro střední školy. Prometheus, Praha 1996. 195s. ISBN 80-7196-030-6.