



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0802
Název projektu	Zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Číslo a název šablony klíčové aktivity	III/2 – Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Příjemce podpory	Gymnázium, Jevíčko, A. K. Vitáka 452

Název DUMu	Kmitavý pohyb
Název dokumentu	VY_32_INOVACE_16_07
Pořadí DUMu v sadě	7
Vedoucí skupiny/sady	Mgr. Petr Mikulášek
Datum vytvoření	9. 5. 2013
Jméno autora	Mgr. Alena Luňáčková
e-mailový kontakt na autora	lunackova@gymjev.cz
Ročník studia	2.
Předmět nebo tematická oblast	Fyzika
Výstižný popis způsobu využití materiálu ve výuce	Materiál pro přípravu na profilovou část maturitní zkoušky z fyziky Inovace: mezipředmětové vztahy s matematikou, využití ICT, mediální techniky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

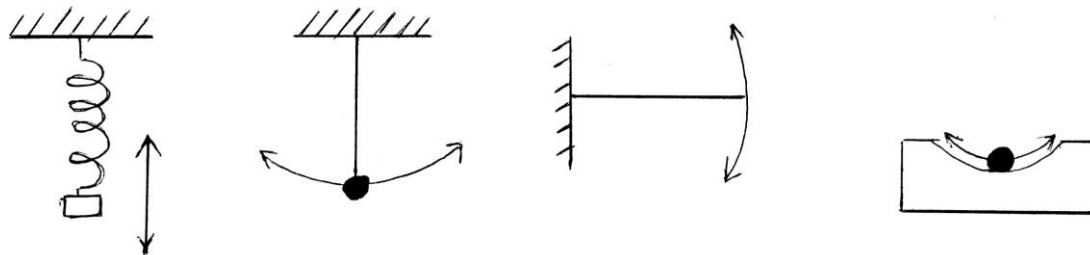
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KMITAVÝ POHYB – MECHANICKÉ KMITÁNÍ

- periodický děj závislý na čase = nestacionární
- mechanické kmity = oscilace

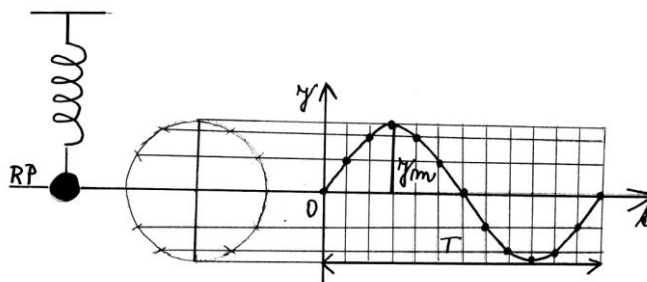
Mechanický oscilátor je soustava, vykonávající kmitavý pohyb. Je-li oscilátor těleso, pak veličiny popisují kmitání těžiště tělesa nebo některého jiného vybraného bodu.

Mechanické kmity – v důsledku mech. oscilátoru



Trajektorii kmitajících těles může být přímka nebo křivka.

Časový diagram – grafické zobrazení okamžité výchylky v závislosti na čase.



RP ... rovnovážná poloha – poloha těžiště tělesa, které je v klidu

KP ... krajní poloha

y ... okamžitá výchylka

y_m ... maximální výchylka (amplituda)

T ... perioda, doba jednoho kmitu

$f = \frac{1}{T}$ [Hz = s⁻¹] ... frekvence, počet kmitů za daný čas, kmitočet; t ... čas

Kmitavý pohyb je **harmonický**, grafem je SINUSOIDA .

- Každý harmonický děj je periodický, ale periodický děj nemusí být harmonický.

Harmonický pohyb vznikne jako průmět pohybu rovnoměrného po kružnici ve směru oběžné roviny.

Kmitání mech. oscilátoru může být:

- netlumené – amplituda se nemění
- tlumené – amplituda se zmenšuje

Kinematika kmitavého pohybu

$y(t)$... dráha = okamžitá výchylka

$v(t) = y'(t)$... rychlost



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$a(t) = v'(t) = y''(t)$... zrychlení

$r = y_m$... maximální výchylka

φ ... úhel = fáze

ω [ads^{-1}] ... úhlová rychlost

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t + \varphi_0 \quad \dots \text{úhel} = \text{fáze}$$

$$\varphi_0 = 0^\circ \Rightarrow y(t) = y_m \cdot \sin \omega t$$

$$v(t) = y_m \omega \cos \omega t = v_m \cos \omega t$$

$$\varphi_0 \neq 0^\circ \Rightarrow y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = y_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Rychlost kmitavého pohybu

v_0 ... dráhová rychlost pohybu po kružnici

$$v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = \omega \cdot r, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad v = v_0 \cos \varphi, \quad r = y_m$$

$$v(t) = y_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad [ms^{-1}]$$

$$y_m \omega = v_m \dots \text{maximální hodnota okamžité rychlosti} \Rightarrow v(t) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Zrychlení kmitavého pohybu

$$a(t) = -y_m \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \cdot y = -a_m \sin \omega t; \quad y(t) = y_m \sin \omega t; \quad a_m = y_m \cdot \omega^2$$

Fáze kmitavého pohybu

φ_0 ... počáteční fáze (v čase 0s), **fázor** = vektor, který označuje počáteční fázi

a) $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0) = y_m \sin \omega(t + \tau)$... kmitání předbíhá

b) $y(t) = y_m \sin(\omega t - \varphi_0) = y_m \sin \omega(t - \tau)$... kmitání se opoždí

Složené kmitání

Platí **princip superpozice** (nezávislosti skládání kmitů):

Koná-li HB dva harmonické pohyby, probíhají oba pohyby vzhledem k inerciální vztažené soustavě nezávisle.

a) kmitý se stejnou úhlovou frekvencí – **izochronní kmitý**

b) kmitý s různou úhlovou frekvencí – **anizochronní kmitý**

Rázy – kmitání složené ze dvou harmonických kmitů se stejnou amplitudou a blízkými frekvencemi.

Dynamika kmitavého pohybu – zabývá se příčinou kmitavého pohybu, příčinou je síla.

- 2. Newtonův pohybový zákon = zákon síly



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$F = m \cdot a$ m ... hmotnost HB, a ... zrychlení kmitavého pohybu

$$a = -\omega^2 \cdot y = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -a_m \sin \omega t$$

$$F = -m\omega^2 y \quad \text{[N]}$$

- síla je přímo úměrná okamžité výchylce
- pružné materiály \Rightarrow dle Hookova zákona

$$F = \frac{ES}{l_0} \Delta l, \quad k \dots \text{tuhost pružiny (materiálová konstanta) [Nm}^{-1}\text{]}$$

$$F = k\Delta l$$

- rovnováha $\Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow mg - k\Delta l = 0$
- porušíme rovnováhu $\Rightarrow y$

$$F = mg - k(\Delta l + y) = mg - k\Delta l - ky = -ky$$

$$F = -ky = -m\omega^2 y \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \text{úhlová rychlost kmitání}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{[s]} \dots \text{perioda = doba jednoho kmitu}$$

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \dots \text{doba jednoho kyvu (je rovna polovině kmitu)}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{[Hz]} \dots \text{frekvence, kmitočty}$$

Matematické kyvadlo – těleso o velké hmotnosti zavěšené na nehmotném závěsu.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Přeměny energie v mechanickém oscilátoru

ZZE pro kmitavý harmonický pohyb: Při kmitavém pohybu se mění E_p v E_k a obráceně, E_c soustavy zůstává stálá a je rovna max. E_p v krajní poloze nebo max. E_k v rovnovážné poloze.

$$E_p = \frac{ky_m}{2} y_m = \frac{1}{2} ky_m^2 = W, \quad E = E_k = \frac{1}{2} mv_m^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 y_m^2, \quad v_m = \omega_0 y_m$$

Celková mech. energie podle ZZE: $E_c = E_p + E_k = \frac{1}{2} ky^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 y_m^2 = \text{konst.}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nucené kmitání mech. oscilátoru

- vzniká působením vnější periodické síly na mech. oscilátor
- frekvence kmitů je shodná s frekvencí působící síly \Rightarrow netlumené kmitání
- vznikají např., jestliže rozkmitáme pružinový oscilátor nebo kyvadlo rukou, mech. působením apod.

Rezonance mech. oscilátoru

- úhlová frekvence ω nucených kmitů je shodná s frekvencí ω_0 vlastních kmitů oscilátoru ; y_m je největší – **rezonanční zesílení**
- rezonance je rozkmitání :
 - desek hudebních nástrojů
 - částí strojů při rotaci strojů
 - mostu při pochodu vojenského útvaru přes most
 - struny hudebního nástroje
- rezonanční křivka je graf pro vyjádření závislosti y_m a ω .



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady:

1. Hmotný bod koná harmonické kmity s amplitudou $y_m = 8\text{cm}$ a s frekvencí $f = 4\text{Hz}$.

Vypočítejte: a) amplitudu rychlosti a zrychlení, b) dobu, za níž se hmotný bod přemístí z rovnovážné polohy do vzdálenosti $y = 4\text{cm}$.

Řešení : Použijeme rovnici pro okamžitou výchylku harmonického pohybu, v níž počáteční fáze $\varphi_0 = 0$. Tedy $y = y_m \sin \omega t$.

a) Rychlost kmitajícího bodu určíme jako derivaci okamžité výchylky podle času

$v = \frac{dy}{dt} = \omega y_m \cos \omega t$, kde amplituda rychlosti je $\omega y_m = 2\pi f y_m$ a po dosazení $f = 4\text{Hz}$,

$y_m = 8 \cdot 10^{-2}\text{m}$ je $v_{\max} = \omega y_m = 2\text{ms}^{-1}$. Zrychlení počítáme jako derivaci rychlosti podle času

$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y_m \sin \omega t$, kde amplituda zrychlení je $a_{\max} = \omega^2 y_m = 4\pi^2 f^2 y_m = 50,5\text{ms}^{-2}$.

b) Dobu t pro přemístění bodu z rovnovážné polohy do vzdálenosti y určíme řešením rovnice

$$y = y_m \sin \omega t \Rightarrow t = \frac{1}{12f} = \frac{1}{48}\text{s}.$$

2. Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 1,4 cm a s periodou 0,25 s. Určete amplitudu rychlosti a zrychlení.

$$(v_{\max} = \omega y_m = 2\pi f y_m = 0,35\text{ms}^{-1}, a_{\max} = \omega^2 y_m = 8,84\text{ms}^{-2})$$

3. Číselná hodnota okamžité výchylky harmonického kmitání je dána vztahem $y = 0,1 \sin \frac{3}{2}\pi t$.

V tomto vztahu číselné hodnoty odpovídají hodnotám fyzikálních veličin vyjádřených v jednotkách SI. Určete amplitudu výchylky, periodu a frekvenci kmitání.

$$(y_m = 0,1\text{m}; f = \frac{3}{4}\text{Hz}; T = \frac{4}{3}\text{s})$$

4. Hmotný bod kmitá harmonicky podle rovnice $y = 0,02 \sin(20\pi t + \frac{\pi}{2})$. Určete okamžité výchylky v časech $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{3}T, \frac{1}{2}T$. Nakreslete časový diagram kmitavého pohybu.

$$(2\text{cm}, 0, -1\text{cm}, -2\text{cm})$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5. Hmotný bod kmitá harmonicky a za 1 minutu vykoná 300 kmitů s amplitudou výchylky 4 cm. Počáteční fáze kmitání je 30° . Napište rovnici harmonického kmitání a nakreslete jeho časový a fázorový diagram.

$$(y = 0,04\sin(10\pi + \frac{\pi}{6}))$$

6. Hmotný bod vykoná 150 kmitů za 2 minuty. Určete počáteční fázi kmitání, jestliže hmotný bod dosáhl kladné amplitudy výchylky za dobu 0,3s od počátečního okamžiku.

$$(\varphi_0 = -\frac{\pi}{4})$$

7. Mechanický oscilátor tvořený pružinou a tělesem o hmotnosti 1,5kg vykoná 30 kmitů za minutu. Určete tuhost pružiny.

$$(k = m \cdot \omega^2 = 15Nm^{-1})$$

8. Určete hmotnost tělesa, které na pružině o tuhosti $200Nm^{-1}$ kmitá tak, že za 10 s vykoná 25 kmitů.

$$(m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = 0,81kg)$$

9. Kyvadlo délky 120cm vykonalo 115 kmitů za 250s. Určete velikost tíhového zrychlení.

$$(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 4\pi^2 l f^2 = 10ms^{-2})$$

10. Celková energie harmonického oscilátoru je $2 \cdot 10^{-5} J$ a maximální velikost síly, která na něj působí, je $1,3 \cdot 10^{-3} N$. Napište rovnici okamžité výchylky oscilátoru, jestliže oscilátor kmitá s periodou 2s a jeho počáteční fáze je 45° .

$$(y = 3 \cdot 10^{-2} \sin(\pi + \frac{\pi}{4}))$$



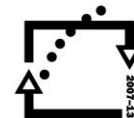
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Seznam použité literatury a pramenů:

- Lepil,O.: Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha 2001. 129s. ISBN 80-7196-216-3.
- Lepil,O.- Bednařík,M.- Široká,M.: Fyzika. Sbíрка úloh pro střední školy. Prometheus, Olomouc 1995. 269s.ISBN 80-7196-048-9.
- Kružík,M.: Sbíрка úloh z fyziky. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1984. 335s. ISBN 14-117-84.

Necitované objekty (užité v tomto DUM) jsou dílem autora.

Materiál je určen pro bezplatné užívání pro potřebu výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.

Dílo smí být šířeno pod licencí CC BY – SA.